TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA 1° MEDIO

REUTILIZABLE
TEXTO ESCOLAR

Vivian Marambio F. • Alejandro Sepúlveda P. • Melissa Silva P.

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

SANTILLANA

TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA 1° MEDIO

Rainbow Bridge, Qingdao City

Vivian Marambio Fuentes
Licenciada en Matemática
Profesora de Educación Media en Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile
Magíster en Didáctica de la Matemática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Alejandro Sepúlveda Peñaloza
Licenciado en Matemática
Magíster en Estadística
Doctor en Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

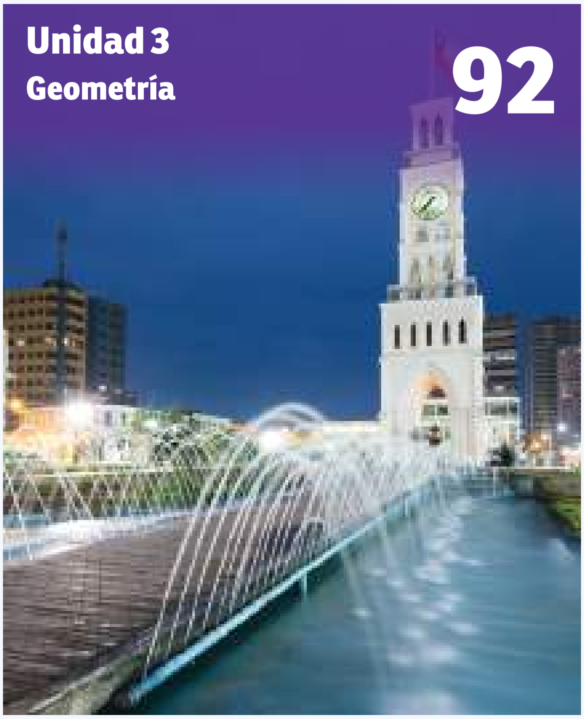
Melissa Silva Pastén
Licenciada en Ciencias con mención en Matemática
Profesora de Educación Media con mención en Matemática
Universidad de Chile

Índice

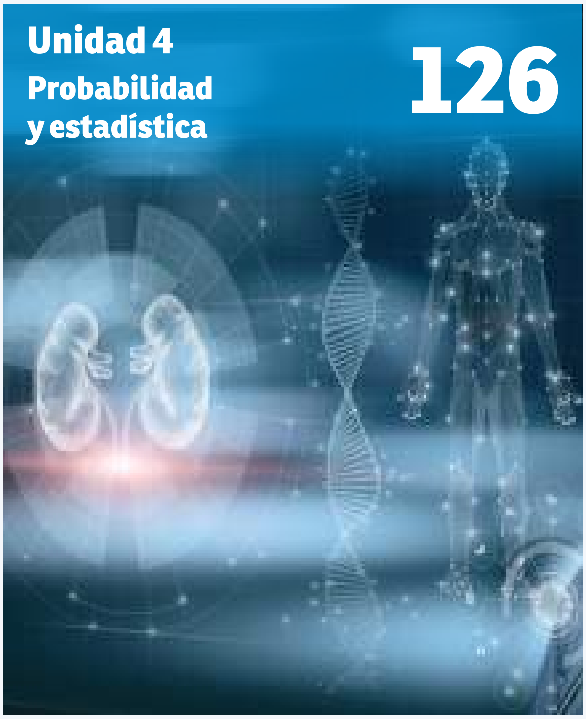
Unidad 1
Números
6

Unidad 2
Álgebra y funciones
48

Unidad 3
Geometría
92



Unidad 4
Probabilidad y estadística
126



Estructura gráfica

El Texto del Estudiante **Matemática 1º medio** está organizado en cuatro unidades . En cada una podrás encontrar lo siguiente:

Inicio de unidad

- **Nombre y número de unidad**
  Se relaciona con el eje temático que se desarrollará en la unidad.

- **Sección inicial motivadora**
  Se relaciona con los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) y con las actitudes del nivel.

- **Habilidades del siglo XXI**
  Se desarrollan para que las y los jóvenes habiten integralmente en la sociedad del conocimiento.

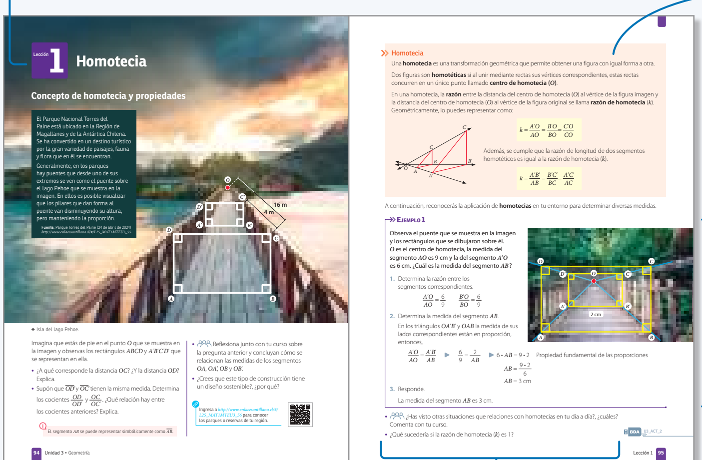
- **Conocimientos previos**
  Se relaciona con los contenidos de cursos anteriores que serán utilizados para impulsar el desarrollo de los nuevos aprendizajes.

- **BDA (Banco Digital de Actividades)** BDA
  Articulación con el BDA para reforzar, ejercitar, profundizar, complementar, afianzar e integrar los nuevos aprendizajes.

Lecciones

Al inicio de cada lección, se proponen temas que invitan a la reflexión y motivan a aprender los contenidos que se verán a continuación. Es, además, una instancia para reconocer ideas previas que servirán para un aprendizaje integral de la matemática.

- **Nombre y número de lección**



- **Formalización**
  Enunciados y síntesis de conceptos relevantes para el aprendizaje. Puede guiar el modelamiento o ubicarse después de la etapa exploratoria.

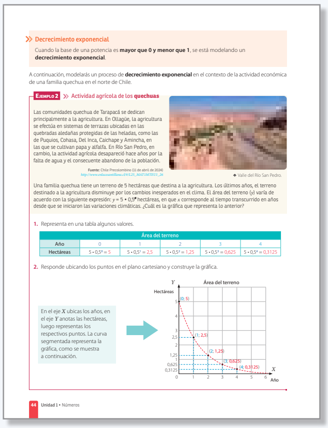
- **Ejemplos**
  Ejemplos y modelamientos explicados paso a paso para resolver problemas y responder a situaciones de la vida cotidiana.

- **Preguntas motivadoras**
  Preguntas individuales y grupales para estimular la reflexión y la comprensión de los nuevos conocimientos y habilidades.

Secciones especiales

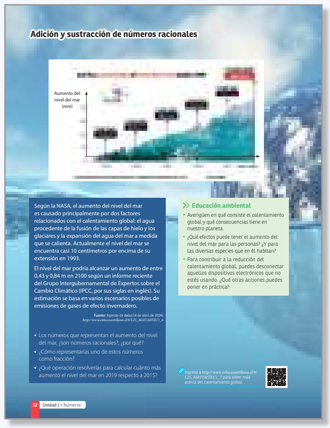
Pueblos Originarios

Contextos que promueven el respeto y la valoración de la diversidad que representan los Pueblos Originarios.



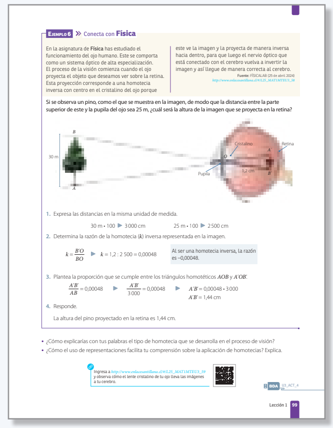
Educación ambiental

Contextos que fomentan el desarrollo de hábitos que contribuyen al cuidado del medioambiente y al respeto por todos los seres vivos.

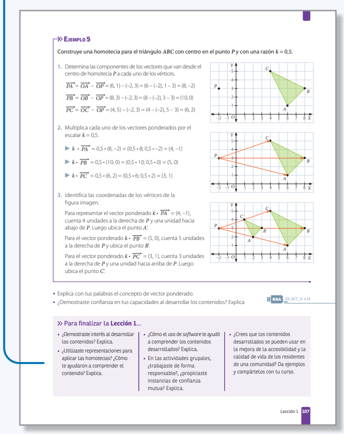


Interdisciplinariedad

Interrelaciones que conectan los nuevos aprendizajes con los contenidos y habilidades de otras asignaturas para lograr su comprensión integral.

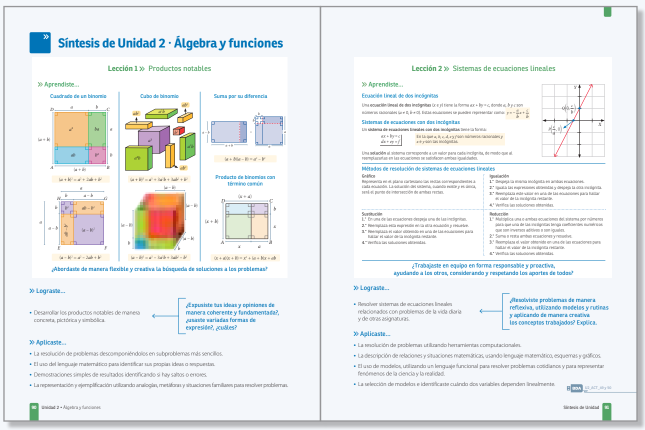


- Instancia **metacognitiva** al final de cada lección que invita a reflexionar sobre el propio aprendizaje, sus dificultades y su uso en la sociedad.



- **Síntesis**

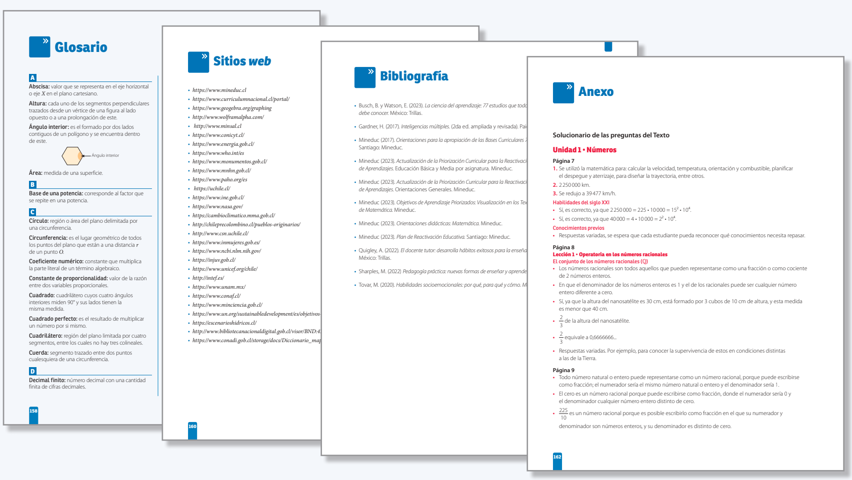
Sección al final de cada unidad que destaca los conocimientos, habilidades, actitudes y Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) desarrollados y propone preguntas para fomentar la metacognición.



Páginas finales

Glosario | Sitios *web* Bibliografía | Anexo

Secciones con la definición de algunos de los conceptos básicos trabajados en la unidad y recomendaciones con los sitios *web* que puedes visitar y libros que puedes consultar. En el Anexo se presentan las respuestas a las preguntas motivadoras propuestas a lo largo del texto.



Unidad 1 Números

La misión Artemis I de la NASA volvió con éxito a la Tierra tras una travesía alrededor de la Luna de casi 26 días.
2,25 millones de km es la distancia total que recorrió la misión Artemis I.

La cápsula Orión de la misión Artemis I ingresó a la atmósfera de nuestro planeta viajando a 40 000 km/h y con temperaturas de aproximadamente 2 760 °C, que soportó gracias a un escudo térmico. La atmósfera inicialmente redujo la rapidez de la nave espacial a 523 km/h y luego los paracaídas redujeron la velocidad a medida que la nave descendió a través de la atmósfera de la Tierra.

Fuente: Biobío Chile (19 de diciembre de 2023). La NASA reveló video inédito de la misión Artemis I regresando a la Tierra desde la Luna: ¿Cómo verlo? *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_1*

Cápsula Orión

En esta unidad trabajarás con los números racionales, su operatoria y potencias; lo que será útil para la resolución de diversos problemas relacionados con la tecnología, la ciencia y otras áreas de interés.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_2* para saber más sobre la misión Artemis.

En todas las ciencias está presente la matemática, y con ella se pueden modelar situaciones y fenómenos, desarrollar fórmulas y efectuar cálculos. Esto ha aportado al desarrollo tecnológico que hemos alcanzado, el cual avanza constantemente.

1. ¿Cómo crees que aporta o se utiliza la matemática en esta misión?
2. ¿Cómo representarías la distancia recorrida por la misión Artemis I?
3. ¿En cuánto se redujo la velocidad de Orión al ingresar a la atmósfera de nuestro planeta?

Habilidades del **siglo XXI**

Utiliza una calculadora científica *online* para comprobar que la misión Artemis I recorrió 2 250 000 km.

- ¿Es correcto afirmar que la distancia recorrida se puede representar como $15^2 \cdot 10^4$ km?
- ¿La velocidad de Orión al ingresar a la atmósfera equivale a $2^2 \cdot 10^4$ km/h? ¿En qué te basas para responder lo anterior?

Calculadora científica *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_3

Conocimientos previos

- Estos contenidos te ayudarán a abordar el trabajo de esta unidad.

Multiplicación y división de números enteros

Si a y b son números enteros distintos de cero y tienen

- el mismo signo, entonces, $a \cdot b$ y $a : b$ es positivo.
  Por ejemplo: $2 \cdot 5 = 10$, $(-2) \cdot (-5) = 10$.
- distinto signo, entonces, $a \cdot b$ y $a : b$ es negativo.
  Por ejemplo: $36 : (-4) = -9$, $(-36) : 6 = -6$.

Todo número entero a multiplicado por cero resulta cero, es decir, $a \cdot 0 = 0$

Al dividir el número cero por cualquier número a distinto de cero resulta cero, es decir, $0 : a = 0$.

Potencias

Si a, n y b son números naturales, la potencia a^n corresponde a

Exponente
Valor de la potencia.

$$\text{Base} \rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = b$$

Se lee a elevado a n es igual a b.

Por ejemplo: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, se lee 5 elevado a 3 es 125.

- ¿Cuál de estos conocimientos necesitas repasar? Coméntalo con el curso.

U1_ACT_1
U1_VID_1
BDA U1_APL_1

Lección **1**

Operatoria en los números racionales

El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

El nanosatélite está formado por 3 cubos de iguales medidas.

Plantsat es un nanosatélite cuyo objetivo es realizar experimentos biológicos en el espacio. En su interior viajará un clavel del aire, planta que no necesita tierra para sobrevivir, pero que funciona como análoga a plantas que pueden ser relevantes en el espacio, tanto como alimento como para producir oxígeno. Su contenedor, especialmente fabricado para mantener a la planta viva y medir su condición, permitirá determinar si esta tolera el ambiente espacial, la microgravedad y la radiación. Con el mismo objetivo, serán enviados cuatro contenedores más pequeños con microorganismos que viven en zonas extremas de Chile y que pueden sobrevivir en este tipo de condiciones, con el fin de tener aplicaciones en el espacio, por ejemplo, como purificadores de agua.

Fuente: Diario Universidad de Chile (2 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_4

- ¿Qué te sugiere el concepto de «racional» al relacionarlo con un número?
- ¿En qué se diferencian los números racionales de los números enteros?
- ¿Es correcto afirmar que la altura del nanosatélite es inferior a 40 cm?, ¿por qué?
- ¿Qué fracción de la altura del nanosatélite corresponde a la altura de los otros dos cubos?
- ¿A qué número decimal equivale la fracción de la pregunta anterior?
- ¿Por qué piensas que se realizan estas pruebas con este tipo de plantas y microorganismos? Comenta con el curso.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_5* para saber más sobre el nanosatélite Plantsat.

Números racionales

El **conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)** está compuesto por todos los números que se pueden escribir como una **fracción**, en la cual el numerador (a) y el denominador (b) son números enteros. Además, el **denominador** debe ser **distinto de cero**.

Simbólicamente se representa: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

$$\left.\left.\mathbb{N}\ \right\}\ \mathbb{Z}\ \right\}\ \mathbb{Q}$$

$\mathbb{N}$: conjunto de los números naturales.
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
$\mathbb{Z}$: conjunto de los números enteros.
$\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
/: tal que.
$\in$: pertenece.
$\neq$: distinto.

A continuación, conocerás algunos **números racionales** ($\mathbb{Q}$) en variados contextos relacionados con el trabajo científico y tecnológico.

Ejemplo 1

El submarinismo o buceo en el mar es el acto en el cual una persona sumerge su cuerpo en el mar. Una científica estudia ciertas especies submarinas y necesita bucear para desarrollar su investigación. El día 1 se sumerge a 25,5 m y el día 2, a $\frac{132}{5}$ m. ¿Qué día estuvo a una mayor profundidad?

1. Representa el número decimal como fracción.

$$25{,}5 = \frac{255}{10}$$

2. Amplifica la fracción correspondiente a la profundidad alcanzada el día 2 para igualar los denominadores de ambas fracciones.

$$\frac{132 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{264}{10}$$

3. Compara las fracciones que representan la profundidad a la que buceó la científica cada día. Al tener igual denominador, comparas los numeradores.

$$\text{Día 1} \blacktriangleright \frac{255}{10} < \frac{264}{10} \blacktriangleright \text{Día 2}$$

4. Responde.

   El día 2 la científica estuvo a una mayor profundidad.

- ¿Todo número natural o entero distinto de cero puede ser representado como un número racional?, ¿por qué?
- El 0 ¿es un número racional? Explica.
- ¿Qué condiciones cumple $\frac{255}{10}$ para afirmar que es un número racional?

BDA U1_ACT_2

Números decimales periódicos

Un **número decimal periódico** es aquel que tiene una o varias cifras decimales que se **repiten infinitamente** (**período**). Un número decimal infinito se clasifica como **decimal periódico** cuando el período comienza a partir de la primera cifra decimal. Se simboliza el período con una línea superior sobre el o los dígitos que se repiten.

Cuando calculas divisiones entre números enteros, no siempre obtienes como resultado otro número entero o un número decimal finito. A continuación, se presenta un ejemplo en el que se trabaja la representación de **números decimales periódicos como fracción**.

Ejemplo 2

Para realizar una campaña de reciclaje en el colegio, Josefina debe repartir cierta cantidad de cajas en un determinado número de cursos de manera que a cada uno le corresponda la misma cantidad de cajas. Al hacer el cálculo respectivo, señala que a cada curso le corresponderá la cantidad que se muestra en la imagen. ¿Cuántas cajas debe repartir Josefina y entre cuántos cursos?

1. Identifica el número decimal infinito que se muestra en la calculadora.

$$5{,}1851851852 \approx 5{,}185185185\ldots = 5{,}\overline{185}$$

Generalmente las calculadoras científicas aproximan los números periódicos y semiperiódicos.

2. Determina el número racional x cuya expresión decimal es $5{,}\overline{185}$.

(1) $5{,}\overline{185} = x$

(2) $5\,185{,}\overline{185} = 1\,000x$ ← Multiplica por 1 000 la igualdad (1) y obtienes la igualdad (2).

$5\,185{,}\overline{185} - 5{,}\overline{185} = 1\,000x - x$ ← Resta la igualdad (1) a la igualdad (2).

$$\begin{array}{r} 5\,185{,}185185\ldots \\ -\quad 5{,}185185\ldots \\ \hline 5\,180{,}000000\ldots \end{array}$$

$5\,180 = 999x$

$\dfrac{5\,180}{999} = x$ ← Divide por 999 ambos lados de la igualdad.

$\dfrac{140}{27} = x$ ← Simplifica.

3. Responde.

Josefina debe repartir 140 cajas entre 27 cursos.

- ¿Cómo relacionas lo que ya sabías acerca de los números racionales con lo que sabes ahora?
- ¿Qué dificultades tuviste para comprender cómo representar un decimal periódico como fracción?
- Comenta con tu curso cómo representarías el número $3{,}\overline{24}$ como fracción.

Números decimales semiperiódicos

Un número decimal infinito se clasifica como **decimal semiperiódico** cuando hay una o varias cifras decimales antes del período, denominadas **anteperíodo**.

Densidad en $\mathbb{Q}$

Es posible encontrar un número racional entre dos números racionales distintos entre sí. Esta propiedad es conocida como **densidad**, e implica que, si a y b son dos números racionales, entonces existe otro racional c que está entre ellos. Como c también es un número racional, por la misma propiedad, existe un racional d que está entre a y c. El **conjunto $\mathbb{Q}$ es denso**, ya que entre dos números racionales existen infinitos números racionales.

Los números **decimales semiperiódicos** también son números racionales. A continuación, comprenderás cómo expresar estos números como una fracción.

Ejemplo 3

En un laboratorio químico se mide la masa de una sustancia en una balanza como se muestra en la imagen. Si la cantidad de sustancia equivale a $\frac{64}{45}$ g, ¿es correcta la masa que muestra el visor de la balanza?

1. Identifica el número decimal infinito semiperiódico que se muestra en la balanza.

$$1{,}422222\ldots = 1{,}4\overline{2}$$

2. Determina el número racional x cuya expresión decimal es $1{,}4\overline{2}$.

$(1)\quad 1{,}4\overline{2} = x$

$(2)\quad 142{,}\overline{2} = 100x$ ← Multiplica por 100 la igualdad (1) y obtienes la igualdad (2).

$(3)\quad 14{,}\overline{2} = 10x$ ← Multiplica por 10 la igualdad (1) y obtienes la igualdad (3).

$142{,}\overline{2} - 14{,}\overline{2} = 100x - 10x$ ← Resta la igualdad (3) a la igualdad (2).

$128 = 90x$

$\frac{128}{90} = x$ ← Divide por 90 ambos lados de la igualdad.

$\frac{64}{45} = x$ ← Simplifica.

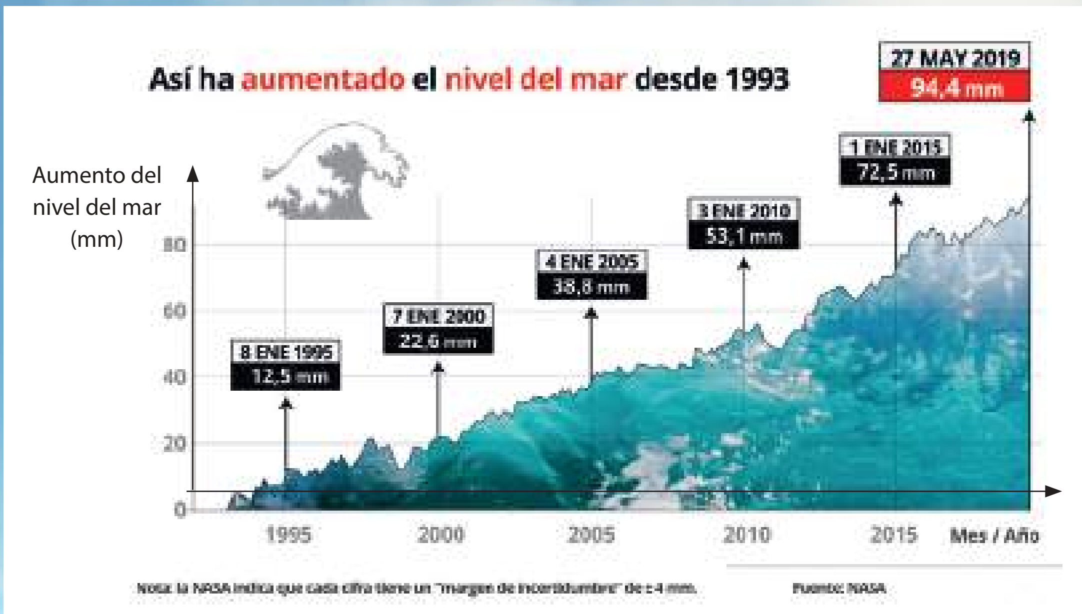
3. Responde.

La masa que muestra el visor de la balanza es correcta.

- ¿En qué se asemeja y en qué se diferencia el número decimal del **Ejemplo 3** con el del **Ejemplo 2**? Comenta con el curso.
- ¿Por qué en el **Ejemplo 2** y en el **Ejemplo 3** se multiplicó por 1 000, por 100 y por 10?
- ¿Crees que un número decimal siempre se puede representar como un número racional?, ¿por qué?
- ¿Qué estrategias utilizaste para representar decimales semiperiódicos como fracción?
- Encuentra diez números racionales entre a y b, con $a = \frac{3}{2}$ y $b = 1{,}7$.
- ¿Crees que el compartir tus razonamientos con tu curso ayuda a tu aprendizaje?, ¿por qué?

BDA U1_ACT_3 a 6

Adición y sustracción de números racionales



Según la NASA, el aumento del nivel del mar es causado principalmente por dos factores relacionados con el calentamiento global: el agua procedente de la fusión de las capas de hielo y los glaciares y la expansión del agua del mar a medida que se calienta. Actualmente el nivel del mar se encuentra casi 10 centímetros por encima de su extensión en 1993.

El nivel del mar podría alcanzar un aumento de entre 0,43 y 0,84 m en 2100 según un informe reciente del Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC, por sus siglas en inglés). Su estimación se basa en varios escenarios posibles de emisiones de gases de efecto invernadero.

Fuente: Agenda de datos (4 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_6

- Los números que representan el aumento del nivel del mar, ¿son números racionales?, ¿por qué?
- ¿Cómo representarías uno de estos números como fracción?
- ¿Qué operación resolverías para calcular cuánto más aumentó el nivel del mar en 2019 respecto a 2015?

Educación ambiental

- Averigüen en qué consiste el calentamiento global y qué consecuencias tiene en nuestro planeta.
- ¿Qué efectos puede tener el aumento del nivel del mar para las personas? ¿Y para las diversas especies que en él habitan?
- Para contribuir a la reducción del calentamiento global, puedes desconectar aquellos dispositivos electrónicos que no estés usando. ¿Qué otras acciones puedes poner en práctica?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_7* para saber más acerca del calentamiento global.

Adición y sustracción de fracciones

Para resolver una **adición** o **sustracción de fracciones**, puedes amplificar una o ambas fracciones para igualar sus denominadores. De este modo conservas el denominador común y sumas o restas sus numeradores según corresponda.

A continuación, se muestran algunos ejemplos en los que se resuelven **adiciones y sustracciones de fracciones** con distinto denominador.

Ejemplo 1

Algunos drones submarinos se utilizan en investigación científica y en la exploración de los océanos. Estos permiten a los científicos estudiar los ecosistemas marinos, recolectar muestras de agua y sedimentos, y realizar investigaciones oceanográficas.
Según la información registrada en las imágenes, ¿a qué fracción de la profundidad máxima se encuentra el dron?

1. Amplifica cada fracción para igualar sus denominadores.

   Antes ▶ $\frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{4}{20}$ Después ▶ $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$

2. Suma las fracciones para determinar a qué fracción de la profundidad máxima se halla el dron. Al tener igual denominador, sumas los numeradores.

   $$\frac{4}{20} + \frac{15}{20} = \frac{(4 + 15)}{20} = \frac{19}{20}$$

3. Responde.

   El dron se encuentra a $\frac{19}{20}$ de la profundidad máxima.

Ejemplo 2

En una ciudad se lanzó una campaña para recolectar teléfonos móviles en desuso y así poder reciclar sus componentes. En la primera semana se recogieron $\frac{3}{4}$ kg y en la segunda $1\frac{1}{2}$ kg. ¿Cuántos kilogramos más se juntaron la segunda semana?

1. Expresa el número mixto como fracción. Luego, amplifícala para igualar su denominador al de la otra fracción.

   $$1\frac{1}{2} \blacktriangleright 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4}$$

2. Resta las fracciones para calcular la diferencia entre los kilogramos de teléfonos recolectados en ambas semanas. Al tener igual denominador, restas los numeradores.

   $$\frac{6}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6 - 3}{4} = \frac{3}{4}$$

3. Responde.

   La segunda semana se recolectaron $\frac{3}{4}$ kg más de teléfonos en desuso.

También puedes resolver estas operaciones así:

Adición:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Sustracción:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$.

BDA U1_ACT_7

Adición y sustracción de números decimales finitos

Para resolver una **adición** o **sustracción de números decimales finitos**, puedes ordenarlos de manera vertical, cuidando que la coma decimal quede alineada, y luego calculas de modo habitual.

Los números decimales permiten representar variadas medidas, como la masa, el volumen o la longitud. Te invitamos a analizar el siguiente ejemplo en el que se **resuelve una adición de números decimales finitos**.

Ejemplo 3

En un colegio de la zona costera de Valparaíso realizan una campaña de limpieza de playas. Entre 4 cursos recolectaron 200 kg de botellas plásticas. El primer curso recogió 60,25 kg; el segundo, 13,2 kg; el tercero, 45,93 kg. ¿Cuántos kilogramos recolectó el cuarto curso?

1. Suma los kilogramos de botellas plásticas recolectados por tres de los cursos. Ordena los números de manera vertical, alineándolos por la coma decimal.

	C	D	U	,	d	c
		6	0	,	2	5
		1	3	,	2	
+		4	5	,	9	3

2. Suma los dígitos desde los centésimos (c) hacia las decenas (D). Completa con cero en aquellos números que no tienen décimos o centésimos.

	1		1			
	C	D	U	,	d	c
		6	0	,	2	5
		1	3	,	2	0
+		4	5	,	9	3
	1	1	9	,	3	8

3. Resta al total recolectado la cantidad de kilogramos reunidos por estos tres cursos. Vuelve a ordenar los números de manera vertical y no olvides alinearlos por la coma decimal.

	1	9	9		9	10
	C	D	U	,	d	c
	~~2~~	~~0~~	~~0~~	,	~~0~~	~~0~~
−	1	1	9	,	3	8
	0	8	0	,	6	2

4. Responde.

El cuarto curso recolectó 80,62 kg de botellas plásticas.

El **Día Internacional de Limpieza de Playas** es una actividad que se realiza en más de 120 países durante el mes de septiembre de cada año. En Chile es organizada por la Dirección General del Territorio Marítimo y Marina Mercante de la Armada de Chile y el Ministerio del Medio Ambiente. Se ha comprobado mediante estudios científicos que la basura puede generar serios daños en la fauna marina (por ejemplo, obstrucciones intestinales por la ingesta accidental de plástico), por lo que iniciativas de este tipo constituyen un importante aporte para mejorar la salud de nuestros océanos.

Fuente: DIRECTEMAR (4 de abril de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_8*

- Si en el **Ejemplo 3** representaras con fracciones los números decimales, ¿el resultado sería el mismo? Comenta con tu curso y comprueben el resultado obtenido.

Adición y sustracción de números decimales periódicos o semiperiódicos

Cuando los números decimales son **infinitos periódicos** o **semiperiódicos**, estos se pueden escribir en su forma fraccionaria y luego resolver las operaciones que correspondan.

A continuación, se muestran algunos ejemplos en los que se resuelven **adiciones y sustracciones** con **números decimales periódicos**.

Ejemplo 4

Para analizar el agua de mar, se toman dos muestras como las que se ven en las imágenes. ¿Cuántos milímetros de agua se analizarán en ambas muestras?

1. Representa el número decimal periódico como una fracción y simplifica.

$$\text{Muestra 1} \blacktriangleright 33,\overline{3}\text{ mL} = \frac{333-33}{9}\text{ mL} = \frac{300}{9}\text{ mL} \blacktriangleright \frac{300 : 3}{9 : 3} = \frac{100}{3}$$

2. Representa el contenido de la muestra 2 como una fracción de denominador 3.

$$\text{Muestra 2} \blacktriangleright 100\text{ mL} \blacktriangleright \frac{100 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{300}{3}$$

3. Suma las fracciones para calcular el total de agua de ambas muestras.

$$\frac{100}{3} + \frac{300}{3} = \frac{100+300}{3} = \frac{400}{3} = 133,\overline{3}$$

Al resolver la división 400 : 3, obtienes el decimal periódico $133,\overline{3}$.

4. Responde.

En ambas muestras se analizarán $\frac{400}{3}$ mL o $133,\overline{3}$ mL de agua.

Ejemplo 5

Los residuos marinos son artículos fabricados o usados por las personas y que son deliberadamente desechados en los ríos, mares y playas. Los microplásticos, en particular, corresponden a piezas de plástico con un diámetro menor a 5 mm. ¿Cuál es la diferencia de tamaño entre los microplásticos que se muestran en la imagen?

Fuente: Noticias Universidad de Concepción (6 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_9

1. Representa el número decimal periódico como una fracción y simplifica. Luego, representa la fracción $\frac{7}{2}$ como un número decimal.

$$\text{Microplástico 1} \blacktriangleright 3,\overline{9} = \frac{39-3}{9} = \frac{36}{9} \blacktriangleright \frac{36 : 9}{9 : 9} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\text{Microplástico 2} \blacktriangleright \frac{7}{2} \blacktriangleright 7 : 2 = 3,5$$

2. Resta los números obtenidos para calcular la diferencia entre el tamaño de los microplásticos.

$$4 - 3,5 = 0,5$$

3. Responde.

La diferencia de tamaño entre los microplásticos es 0,5 mm.

BDA U1_ACT_8

EJEMPLO 6

Los Gases de Efecto Invernadero (GEI) están presentes en la atmósfera. Ellos capturan energía y calientan la superficie del planeta. Uno de los principales es el dióxido de carbono (CO_2). Sin embargo, distintas acciones humanas los liberan en forma de contaminación, aumentando su presencia en la atmósfera, lo que provoca el aumento de la temperatura media de la Tierra.

Por otro lado, también es posible capturar estos y retirarlos de la atmósfera. Este proceso se conoce como absorciones o capturas de GEI y se realiza de forma natural por ecosistemas como los bosques, océanos o humedales, entre otros.

Si durante una hora la ampolleta y el televisor de las imágenes están encendidos, ¿a cuántos gramos de CO_2 equivale?

Fuente: Ministerio del Medio Ambiente (9 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_10

Una ampolleta de 15 W encendida durante una hora equivale a $6{,}9\overline{4}$ g de CO_2

Un televisor LCD 20" de 45 W encendido durante una hora equivale a $20{,}8\overline{3}$ g de CO_2

1. Representa los números decimales semiperiódicos como una fracción y simplifica.

Ampolleta

$$6{,}9\overline{4} = \frac{694 - 69}{90} = \frac{625}{90} \blacktriangleright \frac{625 \ :5}{90 \ :5} = \frac{125}{18}$$

Televisor:

$$20{,}8\overline{3} = \frac{2\,083 - 208}{90} = \frac{1\,875}{90} \blacktriangleright \frac{1\,875 \ :5}{90 \ :5} = \frac{375}{18}$$

2. Suma las fracciones para determinar a cuántos gramos de CO_2 equivalen una ampolleta y un televisor encendido durante una hora.

$$\frac{125}{18} + \frac{375}{18} = \frac{500}{18} = 27{,}\overline{7}$$

3. Responde.

La ampolleta de 15 W y el televisor LCD 20" de 45 W al estar encendidos durante una hora equivalen a $27{,}\overline{7}$ g de CO_2

Calculadora científica *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_3

EJEMPLO 7

La carbono neutralidad se refiere a que las emisiones netas del país sean igual a cero. Es decir, es la resta entre las emisiones de GEI y las capturas de CO_2 realizadas.

En 2020, en la región de La Araucanía se emitieron 4 millones de toneladas de CO_2e (unidad de medida de las emisiones de gases de efecto invernadero) y se capturaron 4,7 millones de toneladas de CO_2e.

Durante ese año, ¿se logró la carbono neutralidad en la región de La Araucanía?, ¿por qué?

Fuente: Observatorio de Carbono Neutralidad (10 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_11

1. Escribe la expresión que modela las emisiones netas de GEI.

E_N: Emisiones netas de GEI. ▶ E: Emisiones de GEI. ▶ C: Captura de GEI.

$$E_N = E - C$$

2. Reemplaza los valores en la expresión y resuelve.

$$E_N = 4 - 4{,}7 = 4 + (-4{,}7) = -(4{,}7 - 4) = -0{,}7$$

3. Responde.

Las actividades de captura fueron más allá de la carbono neutralidad porque se eliminaron o capturaron más toneladas de CO_2e de las que se emitieron.

Ejemplo 8 » Educación ambiental

El bosque nativo juega un importante rol en la captura de CO_2, uno de los principales gases de efecto invernadero. Por eso, su conservación es fundamental para combatir este fenómeno.

Esta acción está en concordancia con el Objetivo de Desarrollo Sostenible **ODS 15** Vida de ecosistemas terrestres, desarrollado por la Organización de Naciones Unidas (ONU) para la gestión sostenible de los bosques en nuestro planeta.

Según la Corporación Nacional Forestal (Conaf) un bosque siempreverde es capaz de capturar 17,10 toneladas de CO_2 por hectárea en un año.

La medición de la huella de carbono muestra la cantidad de CO_2 emitido a la atmósfera por nuestras actividades cotidianas, por lo tanto, es un indicador del impacto de las actividades del ser humano que generan el cambio climático.

¿Es correcto afirmar que una hectárea de un bosque nativo en un año compensa la huella de carbono promedio de 4 personas?, ¿por qué?

Fuente: The Real Eco State (10 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_12

➔ En Chile una persona produce en promedio 4,7 toneladas de CO_2 por año.

1. Calcula la huella de carbono de 4 personas en un año.

$$4{,}7 + 4{,}7 + 4{,}7 + 4{,}7 = 18{,}8$$

2. Compara la huella de carbono promedio de las 4 personas en un año con la cantidad de CO_2 capturado por una hectárea de bosque nativo.

$$18{,}8 > 17{,}10$$

El símbolo > se lee como "mayor que".

3. Responde.

No es correcto, ya que la huella de carbono de las 4 personas supera a la cantidad de CO_2 capturada por la hectárea de bosque nativo.

Un bosque siempreverde es un conjunto de especies adaptadas a altas condiciones de lluvia y humedad.

Fuente: Ladera Sur (10 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_13

- ¿En qué situaciones puedes aplicar la adición y sustracción de números racionales? Da dos ejemplos y compártelos con tu curso.
- ¿Qué estrategia utilizaste al resolver adiciones o sustracciones de números racionales que involucraban su forma decimal y fraccionaria al mismo tiempo?
- ¿Fuiste perseverante al resolver problemas? ¿Cómo demostraste esa actitud?
- ¿Qué acciones puedes realizar para contribuir a la disminución del dióxido de carbono CO_2?

BDA U1_ACT_9 a 12
U1_IMA_1

Multiplicación y división de números racionales

La NASA ha enviado cinco vehículos robóticos, llamados rovers, a Marte. Sus nombres son: *Sojourner* (1997), *Spirit and Opportunity* (2004), *Curiosity* (2012) y *Perseverance* (2021).

Fuente: NASA (11 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_14

Spirit and Opportunity
Aterrizaron en Marte en enero de 2004.
Masa: 169,64 kg (cada uno)
Rapidez máxima: 0,1 mph (millas por hora)

Perseverance
Aterrizó en Marte en febrero de 2021.
Masa: 1 025,119 kg
Rapidez máxima: 0,09 mph (millas por hora)

Los robots son máquinas que combinan mecánica de precisión, electrónica y control para llevar a cabo tareas de manera autónoma. Su creación requiere la colaboración de especialistas en diversas áreas, como robótica, inteligencia artificial, ciencias de la computación, electrónica, telecomunicaciones y diseño industrial.

Aunque los robots todavía dependen de la intervención humana para ciertas tareas, su constante evolución los ha convertido en herramientas valiosas en áreas como la medicina, asistencia, localización de personas, entre otras.

Fuente: Una mirada de la Ciencia, UNAM (11 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_15

- Observa los números que representan la masa y la rapidez máxima de los *rovers*. ¿Por qué se relacionan con números racionales?
- ¿Cuál es la masa de los *rovers Spirit and Opportunity* juntos?
- ¿Qué operación resolverías para calcular la distancia que recorren los *rovers* en 2 horas?
- ¿Qué operación resolverías para calcular en cuánto tiempo *Perseverance* ha recorrido 0,45 millas?
- ¿Qué expresión representa la distancia recorrida por *Perseverance* durante n horas?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_16* para saber más acerca de los avances de Perseverance en Marte.

Multiplicación de números racionales

Para **multiplicar números racionales**, ten en cuenta lo siguiente:

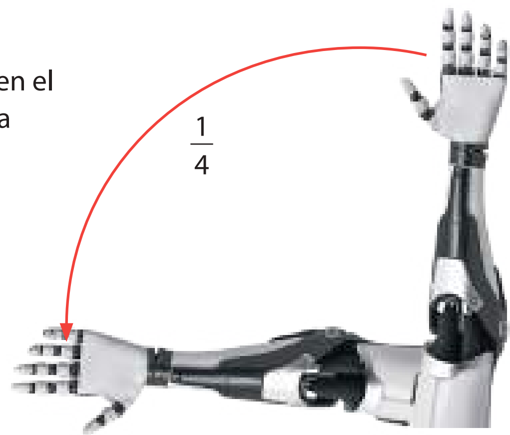
- Si son **números decimales**, los multiplicas de manera habitual, considerando que la posición de la coma decimal se desplaza, de derecha a izquierda, tantos lugares como cifras decimales tenga cada número decimal.
- Si están representados como **fracciones**, simbólicamente resuelves.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ en que } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \text{ con } b \neq 0, d \neq 0.$$

Para resolver algunos problemas, es necesario aplicar la **multiplicación de números racionales**. A continuación, se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Un brazo robótico fue diseñado para hacer giros positivos (+) si gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y giros negativos (–) si gira en el sentido de las manecillas del reloj. Para comenzar, el brazo giró 3 veces $-\frac{3}{4}$ de su posición inicial. ¿Cuánto giró con respecto a su posición inicial?



1. Plantea la operación que representa cuánto giró el brazo respecto a la posición inicial.

   3 veces $\frac{3}{4}$ en el sentido de las manecillas del reloj.

   $$3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

2. Resuelve la multiplicación.

   $$3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{1} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3 \cdot (-3)}{1 \cdot 4} = -\frac{9}{4} = -\left(2\frac{1}{4}\right)$$

3. Responde.

   El brazo dio 2 giros completos y $\frac{1}{4}$ respecto a su posición original y en el sentido de las manecillas del reloj.

Ejemplo 2

Una unidad de memoria de un dispositivo divide su capacidad en 3 partes iguales, y cada una de las partes se divide a la mitad. ¿Cuánto representa cada mitad con respecto a la capacidad total de memoria del dispositivo?

1. Plantea la operación que representa la situación descrita.

   Capacidad dividida en 3 partes. ◀ $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ ▶ Cada parte dividida a la mitad.

2. Resuelve la multiplicación.

   $$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

3. Responde.

   Cada mitad representa $\frac{1}{6}$ de la capacidad total de memoria del dispositivo.

BDA U1_ACT_13

Ejemplo 3

Se diseña un robot que permita realizar excavaciones para desarrollar estudios de suelo. En las pruebas realizadas este robot excava un agujero, avanzando, 0,15 m cada hora.

¿Cuál es la profundidad alcanzada luego de $\frac{9}{2}$ horas?

1. Plantea la operación que representa la situación descrita.

Cantidad de horas. ◀ $\frac{9}{2} \cdot 0{,}15$ ▶ Distancia excavada en una hora.

2. Representa el número decimal como fracción y resuelve.

$$\frac{9}{2} \cdot 0{,}15 = \frac{9}{2} \cdot \frac{15}{100}$$

$$= \frac{9 \cdot \cancel{15}}{2 \cdot \cancel{100}}$$ ◀ Simplifica por 5 tanto el numerador como el denominador

$$= \frac{9 \cdot 3}{2 \cdot 20}$$

$$= \frac{27}{40}$$

$$= 0{,}675$$ ◀ Resuelve 27 : 40 para obtener el número decimal correspondiente.

3. Responde.

La profundidad alcanzada es $\frac{27}{40}$ m o 0,675 m.

También puedes resolver la multiplicación así:

$$\frac{9}{2} \cdot 0{,}15 = \quad 4{,}5 \cdot 0{,}15$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 450 \\ +\,0000 \\ \hline 0{,}675 \end{array}$$

Calculadora científica *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_3

Ejemplo 4

Si con el mismo diseño del robot anterior se quiere cavar un agujero de 0,6 m de profundidad, ¿se podrá terminar el trabajo en $3{,}7\overline{5}$ horas?

1. Plantea la operación que representa la situación descrita.

Cantidad de horas. ◀ $3{,}7\overline{5} \cdot 0{,}15$ ▶ Distancia excavada en una hora.

2. Representa ambos números como fracción y resuelve.

$$3{,}7\overline{5} \cdot 0{,}15 = \frac{338}{90} \cdot \frac{15}{100}$$

$$= \frac{\cancel{338} \cdot \cancel{15}}{\cancel{90} \cdot 100}$$ ◀ Simplifica por 15 y luego por 2.

$$= \frac{169 \cdot 1}{3 \cdot 100}$$

$$= \frac{169}{300}$$

$$= 0{,}56\overline{3}$$ ◀ Resuelve 169 : 300 para obtener el número decimal correspondiente.

En $3{,}7\overline{5}$ horas se alcanza una profundidad de $0{,}56\overline{3}$ m.

3. Responde.

No se podrá terminar el trabajo en $3{,}7\overline{5}$ horas, ya que se logra excavar una profundidad inferior a 0,6 m.

Recuerda que el número $3{,}7\overline{5}$ lo puedes expresar como fracción.

$$3{,}7\overline{5} = \frac{375 - 37}{90} = \frac{338}{90}$$

Calculadora científica *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_3

- La multiplicación de dos números racionales, ¿puede dar como resultado un número entero? Comenta con tu curso.

División de números racionales

En el conjunto de los números racionales se tiene lo siguiente:

- El **inverso multiplicativo** de un número $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ se representa por $\frac{1}{a}$, y cumple que:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

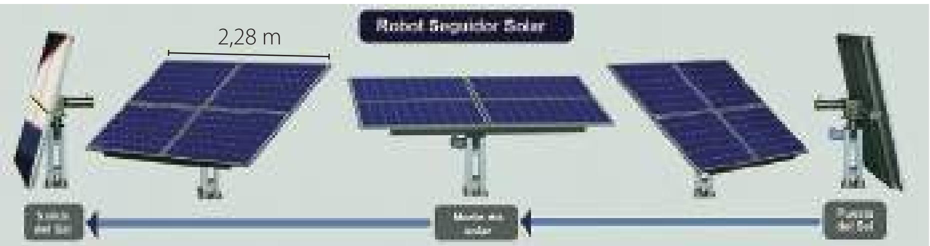
- Para calcular el **cociente entre dos números racionales**, es posible resolver una multiplicación en la que el dividendo $\left(\frac{a}{b}\right)$ se multiplica por el inverso multiplicativo del divisor $\left(\frac{c}{d}\right)$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$, en que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

A continuación, seguirás resolviendo problemas con números racionales. Ahora deberás modelar estas situaciones mediante una **división de números racionales**.

Ejemplo 5

Un robot para seguimiento solar mantiene la posición de los paneles apuntando al Sol a lo largo del día de forma automática, capturando más energía solar. Se pueden instalar donde se tenga un cielo despejado. La principal ventaja de esta tecnología es que genera más energía que si solo se instalaran los paneles solares fijos.



Fuente: Una mirada de la Ciencia, UNAM (11 de abril de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_17*

El área de uno de los paneles de forma rectangular es 3,4656 m². ¿Cuánto mide el ancho del panel solar?

1. Plantea la operación que representa la situación descrita.
   El área (A) del panel se puede calcular multiplicando las medidas de su largo (l) y ancho (a).

$$A = l \cdot a$$
$$3{,}4656 = 2{,}28 \cdot a$$

   Para calcular la medida del ancho del panel, se debe resolver la siguiente división: 3,4656 : 2,28.

2. Representa ambos números como fracción y resuelve.

$$\begin{aligned} 3{,}4656 : 2{,}28 &= \frac{34\,656}{10\,000} : \frac{228}{100} \\ &= \frac{34\,656}{10\,000} \cdot \frac{100}{228} \\ &= \frac{\cancel{34\,656} \cdot \cancel{100}}{\cancel{10\,000} \cdot \cancel{228}} \\ &= \frac{152 \cdot 1}{100 \cdot 1} \\ &= \frac{152}{100} \\ &= 1{,}52 \end{aligned}$$

Simplifica por 100 y por 228.

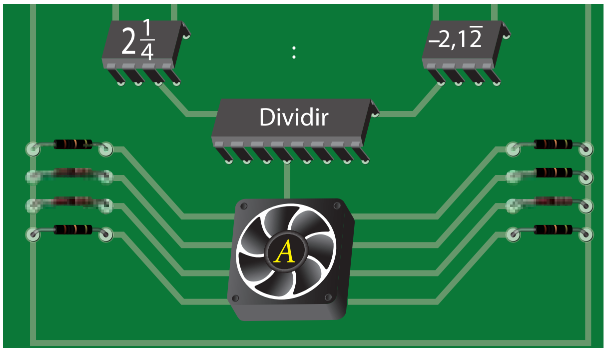
Resuelve 152 : 100 para obtener el número decimal correspondiente.

3. Responde.
   El ancho del panel solar mide 1,52 m.

BDA U1_ACT_14

Ejemplo 6

En un diseño de robótica se tienen que realizar los siguientes cálculos en un circuito:



¿Cuál es el resultado obtenido?

1. Plantea la operación que se representa en el circuito.

$$2\frac{1}{4} : -2,1\overline{2}$$

2. Represent el número mixto y el número decimal como fracción.

$$2\frac{1}{4} : -2,1\overline{2} = \frac{9}{4} : \left(-\frac{191}{90}\right)$$

Recuerda que el número $-2,1\overline{2}$ lo puedes expresar como fracción.

$$-2,1\overline{2} = -\left(\frac{212-21}{90}\right) = -\left(\frac{191}{90}\right)$$

3. Resuelve la división.

$$\begin{aligned}
2\frac{1}{4} : -2,1\overline{2} &= \frac{9}{4} : \left(-\frac{191}{90}\right)\\
&= \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{90}{191}\right)\\
&= \frac{9 \cdot (-\cancel{90})}{\cancel{4} \cdot 191} && \text{Simplifica por 2.}\\
&= \frac{9 \cdot (-45)}{2 \cdot 191} && \text{Recuerda aplicar la regla de los signos, } + \cdot - = -\\
&= -\frac{405}{382}
\end{aligned}$$

4. Responde.

El resultado es $-\frac{405}{382}$

- ¿Qué estrategia utilizaste al resolver divisiones de números racionales que involucraban su forma decimal y fraccionaria al mismo tiempo?
- La división de dos números racionales, ¿puede dar como resultado un número entero? Comenta con tu curso.
- ¿Cuándo obtenemos un resultado mayor: al multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ o al dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$? ¿A qué crees que se debe?
- ¿Demostraste interés y esfuerzo al resolver problemas con divisiones de números racionales?, ¿por qué?

Ejemplo 7

Diana y Sofía están trabajando en el taller de robótica y deben realizar los siguientes cálculos:

$2{,}\overline{3}$ → $: -\dfrac{7}{3}$ → $\cdot\, 3\dfrac{1}{5}$ → $: 0{,}1$ → $\cdot\, -10$

Cada una los hizo por separado y obtuvieron los siguientes resultados:

¿Quién obtuvo el resultado correcto?

1. Resuelve la división.

$$2{,}\overline{3} : \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{21}{9} : \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{21}{9} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{\cancel{21} \cdot (-\cancel{3})}{\cancel{9} \cdot \cancel{7}} = \frac{\cancel{3} \cdot (-1)}{\cancel{3} \cdot 1} = -1$$

2. Multiplica el resultado anterior por $3\frac{1}{5}$.

$$-1 \cdot 3\frac{1}{5} = -1 \cdot \frac{16}{5} = -\frac{1}{1} \cdot \frac{16}{5} = \frac{-1 \cdot 16}{1 \cdot 5} = -\frac{16}{5}$$

3. Divide el resultado anterior por 0,1.

$$-\frac{16}{5} : 0{,}1 = -\frac{16}{5} : \frac{1}{10} = -\frac{16}{5} \cdot \frac{10}{1} = \frac{-16 \cdot \cancel{10}}{\cancel{5} \cdot 1} = -32$$

4. Multiplica el resultado anterior por –10.

$$-32 \cdot -10 = 320$$

5. Responde.

Diana obtuvo el resultado correcto.

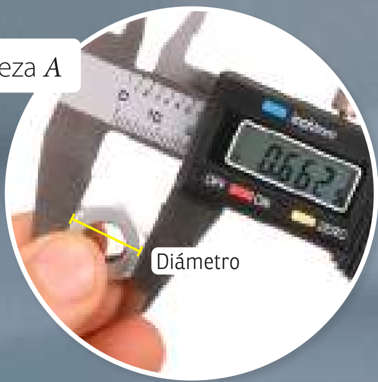
- El resultado anterior, ¿corresponde a un número racional? ¿en qué basas tu afirmación? Explica.

BDA U1_ACT_15 a 18

Operaciones combinadas

La metrología es una rama de la Ciencia que se ocupa de las mediciones, los sistemas de unidades y los instrumentos utilizados para efectuarlas e interpretarlas.

Fuente: ISPCH (15 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_18



Pierre Vernier (1580-1637) fue un matemático francés conocido por la invención de la escala Vernier para medir longitudes con gran precisión.

Fuente: Calibradores Vernier (22 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_19

Los instrumentos de medición como la regla o la cinta métrica tienen una precisión en milímetros, la cual es suficiente para realizar dibujos con unas medidas dadas o medir la altura de las personas.

En cambio, para situaciones relacionadas con medir piezas en las que se necesita más precisión, se utiliza una escala auxiliar conocida como nonio o Vernier. Esta segunda escala divide, en el caso del metro, el milímetro en partes iguales, permitiendo hacer lecturas de hasta centésimas de milímetro.

- Observa las mediciones de las piezas que se muestran en las imágenes. ¿En qué unidad de medida están?
- Si ubicas ambas piezas una al lado de la otra, la suma total de la longitud de los diámetros ¿se relaciona con un número entero?, ¿por qué?
- ¿Cómo calcularías la suma total de la longitud de los diámetros de tres piezas A ubicadas una al lado de otra?
- ¿Cómo calcularías la suma total de la longitud de los diámetros de dos piezas B ubicadas una al lado de otra?
- ¿Qué expresión representa la suma total de la longitud de los diámetros de tres piezas A y de dos piezas B ubicadas una al lado de la otra?
- ¿Qué expresión permite calcular cuánto más mide la suma total de la longitud de los diámetros de dos piezas B que la de una pieza A?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_20* para saber más acerca de la medición de longitudes con precisión.

Propiedades de la adición y multiplicación de números racionales

En el conjunto $\mathbb{Q}$, para la **adición y** la **multiplicación** se cumplen las siguientes **propiedades**:

- **Clausura**: Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces, $(a + b) \in \mathbb{Q}$ y $(a \cdot b) \in \mathbb{Q}$.
- **Conmutativa**: Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces, $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativa**: Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$, entonces, $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- **Elemento neutro**: Para todo $a \in \mathbb{Q}$, existe un único elemento neutro, tal que:

Neutro aditivo	Neutro multiplicativo
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

- **Elemento inverso**: Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe:

Inverso aditivo	Inverso multiplicativo
$-a \in \mathbb{Q}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	$\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$, $(a \neq 0)$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

- **Distributiva**: Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$, entonces, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = (b + c) \cdot a$

A continuación, reducirás expresiones numéricas aplicando las **propiedades de las operaciones** en el conjunto de los números racionales.

Ejemplo 1

En un taller se fabrican piezas metálicas y se registran las medidas que se muestran en la imagen. Se decide fabricar una pieza cuya longitud sea igual a la suma de la mitad de la longitud de cada pieza. Uno de los trabajadores escribió la siguiente operación para calcular la longitud de la nueva pieza:

Longitud 1

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot 31{,}97}_{\text{Mitad de la longitud 1.}} + \underbrace{29{,}37 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Mitad de la longitud 2.}}$$

Aplica las propiedades para determinar la longitud de la nueva pieza.

Longitud 2

1. Aplica las propiedades.

$$\frac{1}{2} \cdot 31{,}97 + 29{,}37 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 31{,}97 + \frac{1}{2} \cdot 29{,}37$$ ← Propiedad conmutativa de la multiplicación.

$$= \frac{1}{2} \cdot (31{,}97 + 29{,}37)$$ ← Propiedad distributiva.

2. Resuelve.

$$\frac{1}{2} \cdot (31{,}97 + 29{,}37) = \frac{1}{2} \cdot 61{,}34$$ ← Resuelve la adición.

$$= 0{,}5 \cdot 61{,}34$$ ← Representa la fracción como número decimal.

$$= 30{,}67$$ ← Resuelve la multiplicación.

3. Responde.

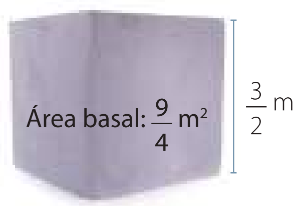
La longitud de la nueva pieza será 30,67 mm.

BDA U1_ACT_19

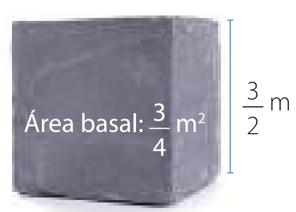
Ejemplo 2

Una impresora 3D de gran escala, con un equipamiento avanzado para la construcción aditiva de viviendas de hormigón, podría construir bloques con forma de prisma recto de base rectangular, como los que se muestran a continuación:

Bloque 1



Bloque 2



El **volumen de un prisma recto** lo puedes calcular multiplicando el área de la base del prisma por la medida de su altura.

¿Cuál es la diferencia de volumen entre ambos bloques? Usa propiedades para responder.

1. Plantea las operaciones que representan la diferencia entre ambos volúmenes.

$$\underbrace{\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}}_{\text{Volumen del bloque 1.}}-\underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}}_{\text{Volumen del bloque 2.}}$$

2. Aplica las propiedades y resuelve.

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{Propiedad conmutativa de la multiplicación.}}=\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\right)}_{\text{Propiedad distributiva.}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{4}=\frac{9}{4}$$

3. Responde.

La diferencia de volumen entre ambos bloques es $\frac{9}{4}$ m³.

Ejemplo 3

La sustracción de 2 números racionales, ¿es conmutativa?

1. Supón que la sustracción es conmutativa, es decir, si $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq b$, entonces $a - b = b - a$.
De la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
a - b &= b - a \;/ + a\\
\underbrace{a - b + a} &= \underbrace{b - a + a}\\
2a - b &= b + 0\\
2a - b &= b \;/ + b\\
\underbrace{2a - b + b} &= \underbrace{b + b}\\
\underbrace{2a + 0} &= 2b\\
2a &= 2b \;/ : 2\\
a &= b
\end{aligned}$$

Recuerda que en una igualdad si sumas un mismo número a ambos lados o divides por un mismo número ambos lados, la igualdad se mantiene.

Como a y b eran distintos, y en este caso se ha demostrado que son iguales, la sustracción no cumple la igualdad $a - b = b - a$.

2. Responde.

La sustracción no es conmutativa.

Operaciones combinadas

Para resolver una **operación combinada**, debes considerar el siguiente orden:

1.º Operaciones entre paréntesis desde el más interior hasta el más exterior.

2.º Potencias.

3.º Multiplicaciones y/o divisiones.

4.º Adiciones y/o sustracciones.

En muchas situaciones es necesario resolver **operaciones combinadas** que involucran números racionales, como en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4

Un edificio fue diseñado de tal manera que algunos pisos están en la planta subterránea. La extensión por debajo del suelo equivale a $\frac{1}{3}$ de la altura del edificio. Cada piso del subterráneo mide $\frac{7}{2}$ m de alto y, del mismo modo, la altura del resto de los pisos es de 3,5 m. ¿Cuántos pisos tiene el edificio?

1. Plantea las operaciones que permiten calcular el total de pisos del edificio.

$$\underbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot 21\right)}^{\text{Altura del subterráneo.}} : \frac{7}{2}}_{\text{Cantidad de pisos del subterráneo.}} + \underbrace{(21 : 3{,}5)}_{\text{Cantidad de pisos sobre el suelo.}}$$

2. Resuelve aplicando la prioridad de las operaciones.

$$\left(\frac{1}{3}\cdot 21\right) : \frac{7}{2} + (21 : 3{,}5) = 7 : \frac{7}{2} + \left(21 : \frac{7}{2}\right)$$

Resuelve la multiplicación del paréntesis y expresa 3,5 como fracción.

$$= 7 : \frac{7}{2} + \left(21 \cdot \frac{2}{7}\right)$$

Representa la división del paréntesis como multiplicación.

$$= 7 : \frac{7}{2} + 6$$

Resuelve la multiplicación del paréntesis.

$$= 7 \cdot \frac{2}{7} + 6$$

Representa la división como multiplicación.

$$= 2 + 6$$

Resuelve la multiplicación.

$$= 8$$

Suma los resultados obtenidos.

3. Responde.

   El edificio tiene 8 pisos.

- ¿Qué conocimientos previos utilizaste en la resolución de operaciones combinadas?
- ¿Cuál es la mayor dificultad que tuviste al realizar operaciones combinadas?
- Cuando resolviste operaciones combinadas, ¿encontraste errores en tus cálculos? ¿cómo los corregiste?

BDA U1_ACT_20 U1_IMA_2

EJEMPLO 5

Diego y Lucas deben resolver las siguientes operaciones para determinar la cantidad de un compuesto (en mg) en un proyecto de Ciencias:

$$\frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \cdot \left(1,25 + \frac{1}{5}\right)$$

Ambos analizan las operaciones y concluyen lo siguiente:

Resolver esta operación combinada equivale a resolver $\frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \bullet 1,25 + 2^2 \bullet \frac{1}{5}$.

No, yo creo que equivale a resolver $\frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \bullet 1,25 + \frac{1}{5}$.

- ¿Quién está en lo correcto?
- ¿Cuál es la cantidad de compuesto que requieren?

1. Aplica la propiedad distributiva. Luego, compara la expresión obtenida con lo que afirman Diego y Lucas.

$$\frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \cdot \left(1,25 + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \cdot 1,25 + 2^2 \cdot \frac{1}{5}$$

Al aplicar la propiedad distributiva obtienes la expresión que señala Diego.

2. Resuelve las operaciones.

$$\frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \cdot \left(1,25 + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\right)$$ Representa como fracción el número 1,25.

$$= \frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 2^2 \cdot \frac{29}{20}$$ Resuelve la adición del paréntesis.

$$= \frac{2}{5} - 0,\overline{3} + 4 \cdot \frac{29}{20}$$ Calcula el valor de la potencia.

$$= \frac{2}{5} - 0,\overline{3} + \frac{29}{5}$$ Resuelve la multiplicación y simplifica.

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{29}{5}$$ Representa como fracción el número $0,\overline{3}$.

$$= \frac{1}{15} + \frac{29}{5}$$ Resuelve la sustracción.

$$= \frac{88}{15}$$ Resuelve la adición.

Recuerda que:
$2^2 = 2 \bullet 2 = 4$

3. Responde.
   - Diego está en lo correcto.
   - Requieren $\frac{88}{15}$ mg del compuesto.

Ejemplo 6

El área de un terreno es $\frac{704}{5}$ m². Se construye una casa que ocupa $\frac{5}{6}$ del área total. La mitad del área restante se utiliza para construir una terraza. ¿Cuál es el área de la terraza?

1. Plantea las operaciones que permiten calcular el área de la terraza.

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{\frac{704}{5}}_{\text{Área del terreno.}} - \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{704}{5}}_{\text{Área de la casa.}}\right)$$

2. Resuelve aplicando la prioridad de las operaciones.

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{704}{5}-\frac{5}{6}\cdot\frac{704}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{704}{5}-\frac{352}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{352}{15}=\frac{176}{15}$$

3. Responde.

El área de la terraza es $\frac{176}{15}$ m².

Ejemplo 7

Si en un cuarto del terreno restante se quiere construir un invernadero, ¿cuál es el área disponible?

1. Plantea las operaciones que permiten calcular el área disponible.

$$\frac{1}{4}\cdot\left[\underbrace{\frac{704}{5}}_{\text{Área del terreno.}} - \underbrace{\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{704}{5}\right)}_{\text{Área de la casa.}} - \underbrace{\frac{176}{15}}_{\text{Área de la terraza.}}\right]$$

2. Resuelve aplicando la prioridad de las operaciones.

$$\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{704}{5}-\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{704}{5}\right)-\frac{176}{15}\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{704}{5}-\frac{352}{3}-\frac{176}{15}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{176}{15}=\frac{44}{15}$$

3. Responde.

El área disponible es $\frac{44}{15}$ m².

De acuerdo con el **Ejemplo 6**, el área de la terraza corresponde a la mitad del terreno restante y equivale a $\frac{176}{15}$ m², por lo tanto, el área de la otra mitad del terreno restante es $\frac{176}{15}$ m². Entonces, el área del invernadero se puede calcular como:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{176}{15}\text{ m}^2=\frac{44}{15}\text{ m}^2$$

Para finalizar la **Lección 1**...

- ¿Demostraste interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas? Si tu respuesta es negativa, explica por qué no lo hiciste. Si fue afirmativa, explica cómo lo hiciste.
- Cuando trabajaste con tu curso, ¿respetaste y valoraste todas las opiniones? ¿Qué actitud mostraste?
- ¿En qué otro ámbito crees que se utilicen las operaciones con números racionales? ¿Por qué razón crees que se usan?
- ¿Aplicaste los contenidos de manera creativa en la resolución de problemas?, ¿por qué?
- ¿En qué tipo de proyectos de Ciencia y Tecnología te gustaría participar con tu curso?, ¿qué rol desempeñarías en él?

BDA U1_ACT_21 a 24

Lección 2

Potencias

Potencias de base y exponente entero

Robots microscópicos en la medicina

Los robots microscópicos son, aproximadamente, 80 mil veces más pequeños que el grosor de un cabello humano. Imagina un robot del tamaño de una molécula capaz de navegar por nuestro cuerpo para diagnosticar enfermedades o administrar medicamentos.

En un metro existen mil millones de nanómetros (nm), es decir, que:

$$1 \text{ m} = 1\,000\,000\,000 \text{ nm} = 10^9 \text{ nm}$$

Por lo tanto, un robot microscópico de 1 nm tiene una medida de:

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

Esto significa que un robot microscópico de 1 nm es mil millones de veces más pequeño que un metro.

Fuente: Nanova (22 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_21

- ¿Habías escuchado de la nanotecnología o de los robots microscópicos? ¿Qué te parece esta tecnología?
- ¿Cómo cambia tu percepción de la medicina al considerar la escala nanométrica de los robots microscópicos?
- ¿Cómo las potencias de diez facilitan la comprensión de las dimensiones de los robots microscópicos?
- ¿Cómo calcularías el valor de la potencia 10^{-9}? ¿Por qué?
- ¿Cómo podrías explicar a tu curso la relación entre los nanómetros y los metros utilizando las potencias de base diez?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_22* para saber más sobre los avances de los robots microscópicos en la medicina.

Potencias de base y exponente entero

Las **potencias de base y exponente entero** son una forma de expresar multiplicaciones repetidas de un mismo número entero. La base es el número que se multiplica, y el exponente indica cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

- Si el **exponente** es **positivo**, la base se multiplica esa cantidad de veces.

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces como factor}}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } a \in \mathbb{Z}, a \neq 0.$$

- Si el **exponente** es **negativo**, se trata de una fracción con 1 en el numerador y, en el denominador, la base elevada al exponente positivo correspondiente.

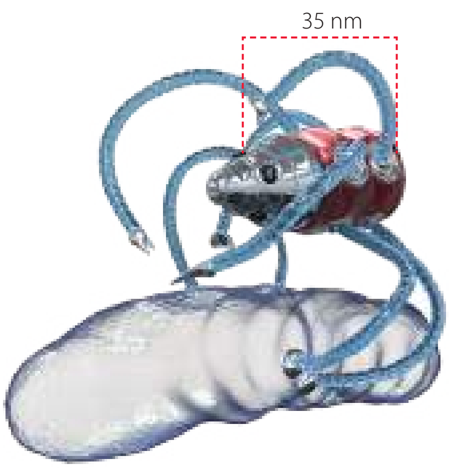
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ veces como factor}}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } a \in \mathbb{Z}, a \neq 0.$$

- Si el **exponente** es **cero**, el resultado será 1, siempre que la base no sea cero.

$$a^0 = 1, \text{ con } a \in \mathbb{Z}, a \neq 0.$$

La escala en la que operan los robots microscópicos es un excelente ejemplo de cómo las **potencias** nos permiten trabajar con medidas extremadamente grandes y pequeñas de manera más manejable.

Ejemplo 1



La longitud de un robot microscópico puede variar entre 1 nm y 100 nm. ¿Cuál es la longitud, en metros, del robot microscópico de la imagen? Exprésala en notación científica.

1. Como 1 m = 10^9 nm, para convertir la longitud del robot microscópico de nanómetros a metros, divide la longitud en nanómetros por 10^9.
2. En este caso, la longitud del robot microscópico es de 35 nm, por lo que la operación es:

$$35 : 10^9 = \frac{35}{10^9} = 35 \cdot 10^{-9} \quad \leftarrow \text{Expresa como producto.}$$
$$= 3{,}5 \cdot 10^{-8} \quad \leftarrow \text{Expresa en notación científica.}$$

3. Responde.

   La longitud, en metros, del robot microscópico de 35 nm es $3{,}5 \cdot 10^{-8}$ m.

Ejemplo 2

Verifica con un ejemplo que cuando $a \neq 0$, se cumple que $a^0 = 1$.

1. Para ello, se toma un número cualquiera distinto de cero, digamos $a = 5$.

   La división 5 : 5, que es igual a 1, se puede escribir como $5^1 : 5^1$ usando potencias.
2. Al aplicar la regla de la división de potencias de igual base para números naturales, se tiene lo siguiente:

$$1 = 5^1 : 5^1 = \frac{5^1}{5^1} = 5^{1-1} = 5^0$$

   Por lo tanto $5^0 = 1$.

BDA U1_ACT_25

Regla del signo de una potencia

El **signo** del resultado **de una potencia** que se compone de una base y un exponente entero se puede determinar de la siguiente manera:

- Si la **base** es **positiva**, el **resultado** será **positivo**, independientemente del valor del exponente.
- Si la **base** es **negativa**, el signo del resultado dependerá del valor del exponente:
  - Si el **exponente** es **par**, el resultado será **positivo**.
  - Si el **exponente** es **impar**, el resultado será **negativo**.

La regla anterior es fundamental para entender y calcular correctamente las **potencias con bases y exponentes enteros.**

Ejemplo 3

Para modelar un experimento, se necesita comprobar que el resultado de -5^4 y de $(-5)^4$ son diferentes.

1. Calcula por separado ambas potencias.
   - $-5^4 = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)$
     $= -(25 \cdot 5 \cdot 5)$
     $= -(125 \cdot 5)$
     $= -625$
   - $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$
     $= 25 \cdot (-5) \cdot (-5)$
     $= -125 \cdot (-5)$
     $= 625$

Recuerda la regla de los signos para la multiplicación de números enteros.

$+ \cdot + = +$
$- \cdot - = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$

2. En el desarrollo de la primera potencia -5^4 se observa que el signo de la potencia es independiente en todo el desarrollo.
3. En el desarrollo de la segunda potencia $(-5)^4$ se observa que el signo de la potencia influye en cada una de las multiplicaciones.
4. Responde.

   El experimento se puede modelar, ya que el resultado de -5^4 es diferente al de $(-5)^4$.

Reflexiona con tu curso:

- ¿Cómo cambia el valor de una potencia cuando el exponente es positivo en comparación con cuando es negativo?
- ¿Cómo afecta el valor del exponente al signo del resultado de una potencia cuando la base es negativa? ¿Por qué crees que sucede esto?
- ¿En qué otro ámbito crees que se utilicen las potencias? ¿Por qué razón crees que se usan?
- ¿Cuál es la importancia del conjunto numérico al que pertenecen la base y el exponente de la potencia?

»Ejemplo 4

Supongamos que un ingeniero biomédico está diseñando un sensor de glucosa que debe caber dentro de un espacio nanométrico. Para asegurarse de que el sensor tenga el tamaño adecuado, la expresión $\frac{c^4 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot b^2}{a^2 \cdot c \cdot c^2 \cdot b^8}$ debe ser igual a la expresión que se muestra en la imagen. Usa las propiedades de las potencias de base entera para simplificar la expresión y verificar que el sensor cumple con el tamaño adecuado.

Considera que $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

1. Aplica la propiedad de multiplicación de potencias de igual base.

$$\frac{c^4 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot b^2}{a^2 \cdot c \cdot c^2 \cdot b^8} = \frac{c^4 \cdot a^2 \cdot b^{4+2}}{a^2 \cdot c^{1+2} \cdot b^8}$$
$$= \frac{c^4 \cdot a^2 \cdot b^6}{a^2 \cdot c^3 \cdot b^8}$$

2. Escribe como producto de fracciones.

$$\frac{c^4 \cdot a^2 \cdot b^6}{a^2 \cdot c^3 \cdot b^8} = \frac{a^2}{a^2} \cdot \frac{b^6}{b^8} \cdot \frac{c^4}{c^3}$$

3. Aplica la propiedad de la división de potencias de igual base.

$$\frac{a^2}{a^2} \cdot \frac{b^6}{b^8} \cdot \frac{c^4}{c^3} = a^{2-2} \cdot b^{6-8} \cdot c^{4-3}$$
$$= a^0 \cdot b^{-2} \cdot c^1$$

4. Resuelve las potencias.

$$a^0 \cdot b^{-2} \cdot c^1 = 1 \cdot b^{-2} \cdot c^1$$
$$= \frac{c}{b^2}$$

5. Responde.

   Por lo tanto, el sensor cumple con el tamaño adecuado.

»Ejemplo 5

Martina asegura que las potencias $(-3)^{-4}$ y $(-4)^{-3}$ tienen el mismo signo y valor. ¿Es correcta esa afirmación?

1. Aplica la regla de una potencia de exponente negativo en cada caso.

- $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{81}$
- $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$

2. Responde.

   La afirmación de Martina no es correcta, ya que sus signos y resultados son diferentes.

BDA U1_ACT_26 a 29

Potencias de base racional y exponente entero

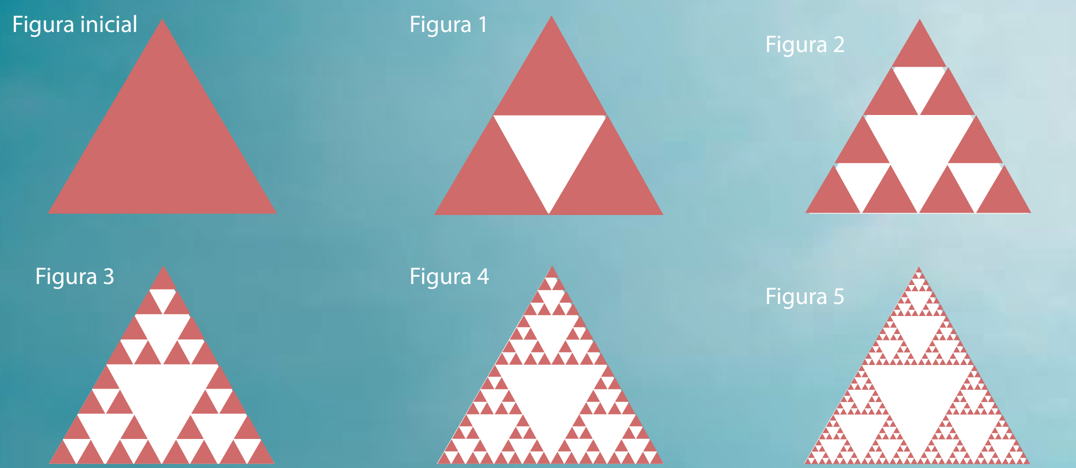
Para comunicarnos a través de nuestros celulares, utilizamos antenas que operan en distintas frecuencias y canales. Algunas antenas están diseñadas a partir del triángulo de Sierpinski, figura geométrica que se forma de manera recursiva. Comenzamos con un triángulo equilátero y, paso a paso, vamos creando una estructura más compleja, como se muestra en la imagen:

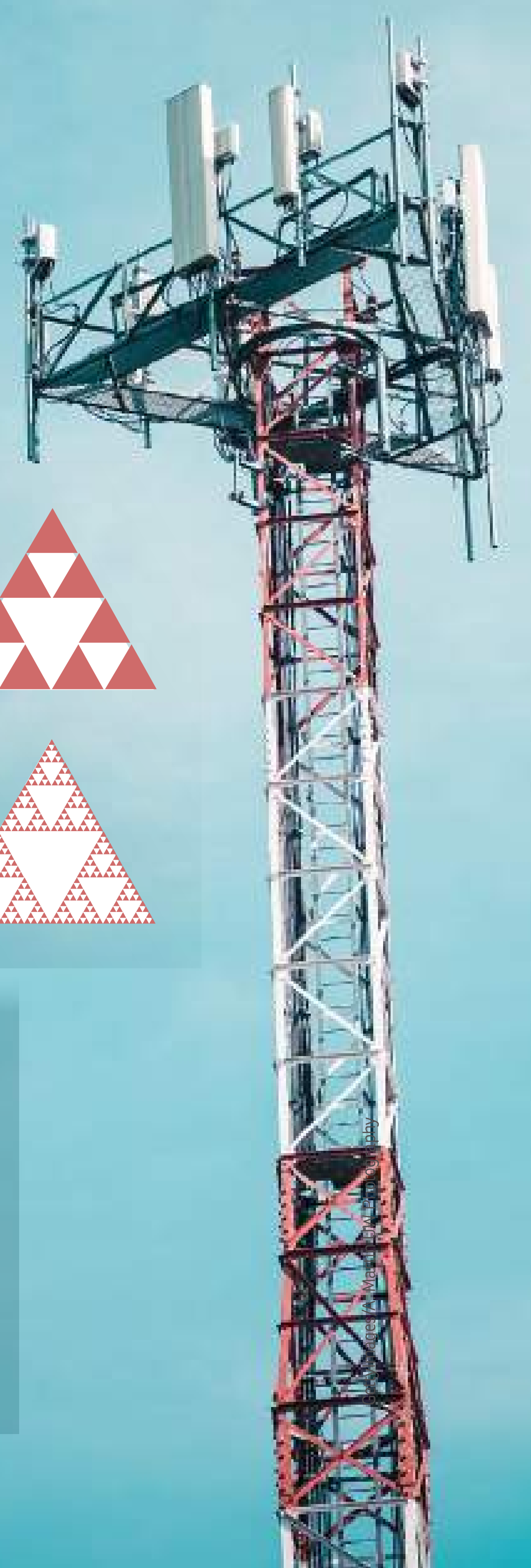
1.° Dibujamos un triángulo equilátero, es decir, con tres lados iguales.

2.° En los puntos medios de cada lado, trazamos un nuevo triángulo y eliminamos el área central.

3.° Repetimos este proceso en los triángulos restantes, generando un patrón que se repite a diferentes escalas.

Fuente: Universitat Politècnica de Catalunya (22 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_23





- Si la medida de los lados del triángulo inicial es 1 cm, ¿cómo crees que puedes aplicar el concepto de potencias para calcular la longitud de los lados de los triángulos no extraídos en las figuras subsiguientes?
- ¿Qué expresión matemática podrías usar para generalizar la medida de los lados de los triángulos no extraídos en cualquier figura de la secuencia? Discute con tu curso cómo llegaste a esa expresión.

Para conocer otras aplicaciones relacionadas con el triángulo de Sierpinski, puedes visitar el siguiente sitio:
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_24

Potencia de base racional y exponente natural

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, la potencia de base $\frac{a}{b}$ y exponente n, con $n \in \mathbb{N}$, se define por:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ veces}}} = \frac{a^n}{b^n}$$, con b distinto de cero.

Las **potencias de base racional y exponente positivo** son fundamentales en la ingeniería, la informática y la biología, entre otras disciplinas, ya que nos permiten realizar cálculos y modelar situaciones de la vida real de manera eficiente.

Ejemplo 1

La intensidad de la señal telefónica, por lo general, se mide en decibelios por encima de un nivel de referencia de un milivatio (dBm). Según la intensidad de la señal registrada en los puntos que se muestran en la imagen, ¿cuál es la diferencia de intensidad entre el punto B y el punto A?

1. Desarrolla cada una de las potencias y multiplica respetando la regla de los signos:

▶ $(-1{,}8)^3 = (-1{,}8) \cdot (-1{,}8) \cdot (-1{,}8)$ ← Desarrolla la potencia.

$= 3{,}24 \cdot (-1{,}8)$ ← Multiplica sucesivamente los números decimales respetando la regla de los signos.

$= -5{,}832$

▶ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ ← Desarrolla la potencia.

$= \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$ ← Aplica la propiedad del producto de fracciones.

$= \frac{16}{81}$

2. La diferencia de intensidad entre el punto B y el punto A se calcula restando la intensidad en el punto A de la intensidad en el punto B. Por lo tanto, la diferencia de intensidad es:

$$\frac{16}{81} - (-5{,}832) = \frac{16}{81} + 5{,}832$$
$$= \frac{16}{81} + \frac{5\,832}{1\,000}$$
$$= \frac{61\,049}{10\,125}$$

3. Responde.

Entonces, la diferencia de intensidad entre los puntos B y A es aproximadamente $\frac{61\,049}{10\,125}$ dBm.

- ¿Qué propiedades de potencias aplicaste en el **Ejemplo 1**?
- ¿De qué otra forma resolverías el **Ejemplo 1**? Explícaselo a tu curso.

BDA U1_ACT_30

Potencia de base racional y exponente entero negativo

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Además, si el exponente es 0, el valor de la potencia es igual a 1, es decir, $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$.

Si $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Al igual que las potencias de base racional con exponente positivo, las **potencias de base racional con exponente negativo** también permiten realizar cálculos y modelar situaciones de la vida real de manera eficiente.

Ejemplo 2

La intensidad de la señal telefónica en un determinado lugar se representa por la potencia $\left(\frac{3}{12}\right)^{-3}$ dBm. ¿Cuál es el valor de dicha intensidad?

1. Para resolver, puedes aplicar las propiedades de las potencias de base racional.

$\left(\frac{3}{12}\right)^{-3} = \frac{3^{-3}}{12^{-3}}$ ← Aplica la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^{-3} : 12^{-3}$ ← Escribe como una división.

$= \frac{1}{3^3} : \frac{1}{12^3}$ ← Aplica la propiedad de la potencia con exponente negativo y base entera.

$= \frac{12^3}{3^3}$ ← Calcula la división de fracciones.

$= \left(\frac{12}{3}\right)^{3} = 4^3 = 64$ ← Aplica la propiedad de la división de potencias de igual exponente y resuelve.

2. Responde.

Entonces, la intensidad de la potencia es de 64 dBm.

Ejemplo 3

Aplicando las propiedades de potencias de base racional y exponente entero, determina el valor de la siguiente potencia: $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$.

1. Aplicando las propiedades de potencias de base racional y exponente entero.

$$\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = \frac{(-2)^0}{7^0}$$

2. Aplica la propiedad de la potencia de exponente 0 y base entera.

$$\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = \frac{(-2)^0}{7^0}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

3. Responde.

Entonces, el valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = 1$.

Potencia de una potencia de base racional

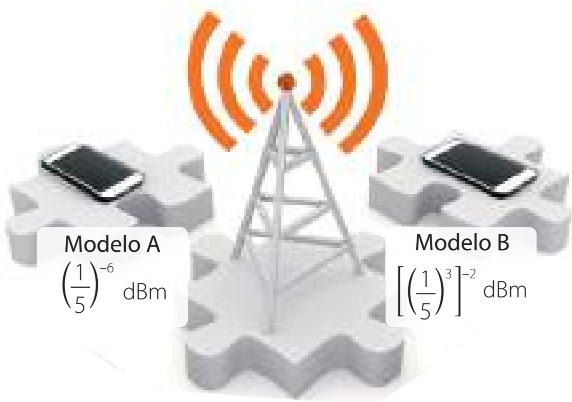
En la **potencia de una potencia** de base racional distinta de cero se cumple lo siguiente:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ y b distinto de cero.

A continuación, seguirás trabajando con potencias de base racional y exponente entero. Aplicarás la **potencia de una potencia** en la resolución de problemas.

Ejemplo 4

En un mismo lugar, la intensidad de la señal recibida por dos modelos de teléfono son las que se muestran en la imagen. ¿Reciben ambos modelos la misma cantidad de señal? Justifica.



1. Para responder, se verifica si se cumple o no la igualdad.

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right]^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6}$$

2. Resuelve cada una de las potencias:

▶ $$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right]^{-2} = \left(\frac{1^3}{5^3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{125}\right)^{-2} = 125^2 = 15\,625$$

▶ $$\left(\frac{1}{5}\right)^{-6} = 5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$$

3. Compara ambos resultados obtenidos.

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right]^{-2} = 15\,625 \text{ y } \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} = 15\,625$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad.

4. Responde.

Como se cumple la igualdad, ambos modelos reciben la misma intensidad de señal: 15 625 dBm.

Educación ambiental

Las torres de telecomunicaciones y los centros de datos requieren mucha energía para operar. Este consumo contribuye a la demanda mundial de electricidad, que a menudo proviene de fuentes no renovables que liberan gases de efecto invernadero. ¿Cómo se podría reducir el consumo energético de estas actividades? ¿De qué forma la matemática podría ayudar a encontrar soluciones o mejoras?

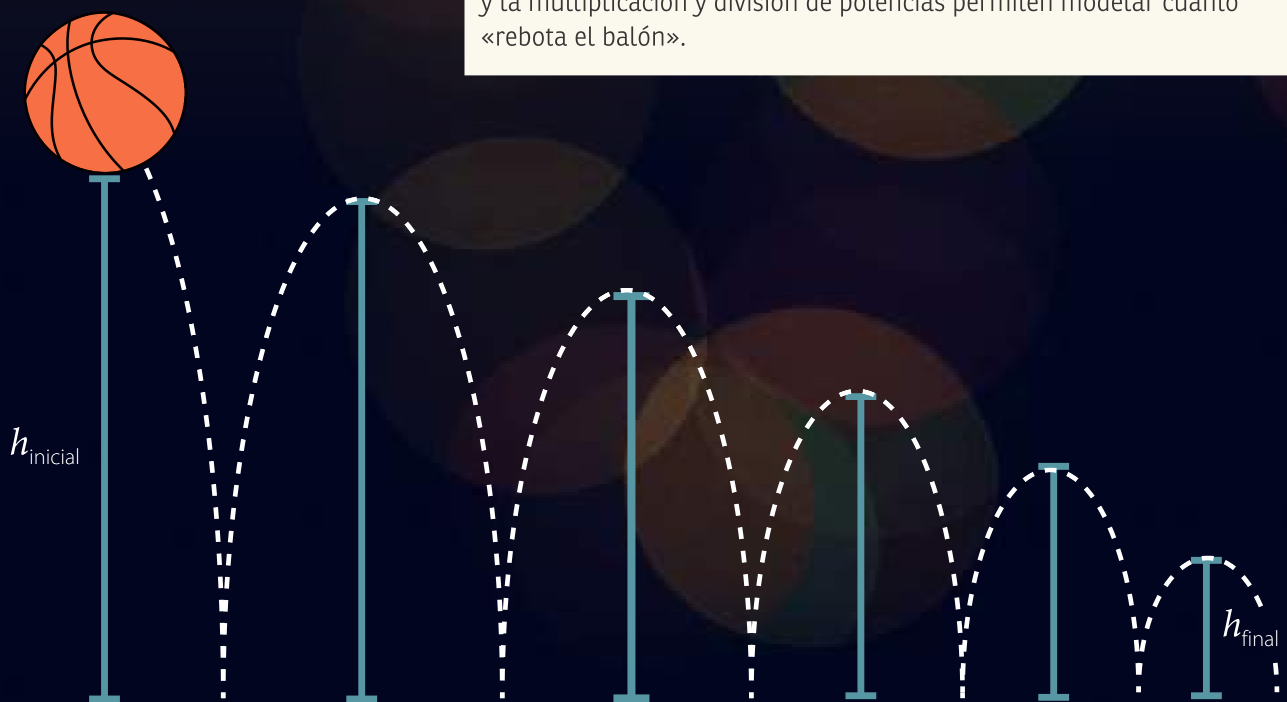
- Explica con tus palabras lo que entiendes por potencia con base racional y exponente entero.
- ¿En qué otras situaciones de la vida cotidiana podrías aplicar las potencias de base racional? Da un ejemplo.
- ¿Trabajaste de manera ordenada y responsable con tu curso? ¿Cómo mejorarías tu trabajo?

BDA U1_ACT_31 a 34

Multiplicación y división de potencias

Conecta con Física

Como has visto en la asignatura de **Física**, cuando dejas caer un objeto, sobre este actúa la fuerza gravitacional. La cinemática es la rama que analiza los patrones del movimiento. Si dejas caer un balón desde 1 metro de altura y observas que en su primer rebote sube hasta 80 cm, al dividir la altura alcanzada en el rebote (80 cm) por la altura inicial (100 cm), obtienes el coeficiente de elasticidad (C). Este número y la multiplicación y división de potencias permiten modelar cuánto «rebota el balón».



Reflexiona con tu curso:

- ¿Qué nos indica el valor de (C) sobre la elasticidad del balón?
- Después del segundo rebote, ¿a qué altura llega el balón? Piensa en cómo usarías las potencias para calcularla.
- ¿Puedes crear una fórmula para determinar la altura del balón en su n-ésimo rebote? Discute tus ideas con tu curso.

Multiplicación de potencias de base racional y exponente entero

- Para multiplicar potencias de **igual base** racional y exponente entero, se conserva la base y se suman los exponentes.

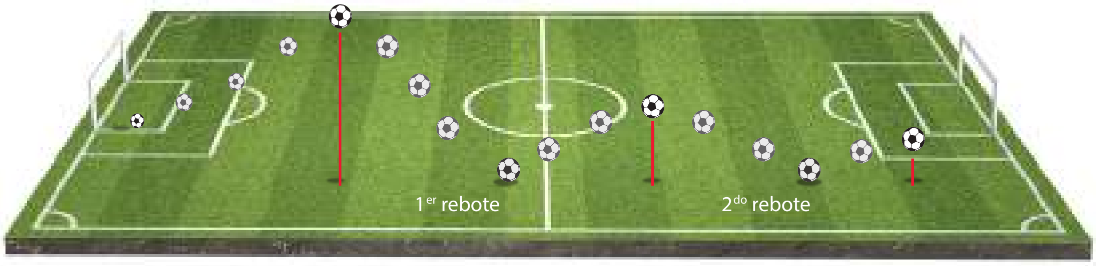
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}, \text{ con } a, b, n, m \in \mathbb{Z};\ b \neq 0.$$

- Para multiplicar potencias de base racional e **igual exponente** entero, se multiplican las bases y se mantiene el exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n, \text{ con } a, b, c, d, n, \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 \text{ y } d \neq 0.$$

EJEMPLO 1

La expresión que determina la altura, en centímetros, alcanzada en el segundo rebote del balón en el campo de fútbol de la imagen es $\left(\frac{14}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2$.



¿Cuál es la altura en centímetros que alcanza?

1. Calcula el producto de potencias de igual exponente.

$$\left(\frac{14}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{14}{5} \cdot \frac{5}{8}\right)^2$$
$$= \left(\frac{14}{8}\right)^2$$
$$= \frac{196}{64}$$
$$= 3{,}0625$$

2. Responde.

   El balón alcanza una altura de 3,0625 cm.

EJEMPLO 2

Al diseñar un balón se determina que su índice de elasticidad está determinado por $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^5$. ¿Cuál es el índice de elasticidad del balón?

1. Aplica la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{(-3)^3}{4^3} \cdot \frac{(-3)^5}{4^5}\right)$$
$$= \frac{(-3)^3 \cdot (-3)^5}{4^3 \cdot 4^5}$$

2. Aplica la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base.

$$\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^5}{4^3 \cdot 4^5} = \frac{(-3)^{3+5}}{4^{3+5}}$$
$$= \frac{(-3)^8}{4^8}$$

3. Aplica la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$$\frac{(-3)^8}{4^8} = \left(-\frac{3}{4}\right)^8$$

4. Responde.

   Su índice de elasticidad se puede expresar como $\left(-\frac{3}{4}\right)^8$.

BDA U1_ACT_35

División de potencias de base racional y exponente entero

- Para dividir potencias de **igual base** racional y exponente entero, se conserva la base y al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}, \text{ con } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\},\ n, m \in \mathbb{Z}.$$

- Para dividir potencias de base racional e **igual exponente** entero, se dividen las bases y se mantiene el exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n, \text{ con } a, b, c, d, n, \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

Ahora aplicarás las **propiedades de la división de potencias** y resolverás problemas usando potencias de base racional.

Ejemplo 3

Aplica las propiedades de las potencias para simplificar la expresión:

$$\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^7 : \left(-\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right]$$

1. En el primer paréntesis, resuelve una división de potencias de igual base.

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^7 : \left(-\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(-\frac{4}{5}\right)^{7-10}$$
$$= \left(-\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{4}\right)^3$$

2. En el segundo paréntesis, resuelve una división de potencias de igual exponente.

$$\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\left(-\frac{2}{20}\right) : \left(\frac{5}{2}\right)\right)^3$$
$$= \left(\left(-\frac{2}{20}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)\right)^3 = \left(\frac{(-2) \cdot (2)}{(20) \cdot (5)}\right)^3 = \left(-\frac{4}{100}\right)^3$$

3. Aplica la propiedad de multiplicación de potencias de igual exponente y resuelve.

$$\left(-\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)^3 = \left(\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)\right)^3 = \left(\frac{(-5) \cdot (-4)}{(4) \cdot (100)}\right)^3$$
$$= \left(\frac{20}{400}\right)^3$$
$$= \left(\frac{1}{20}\right)^3$$

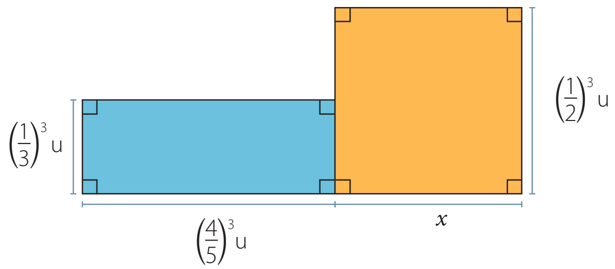
4. Por lo tanto:

$$\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^7 : \left(-\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right] = \left(\frac{1}{20}\right)^3$$

- ¿Por qué crees que las propiedades de las potencias te ayudan en el cálculo de su valor? Explica.
- Explica cómo se relacionan las potencias de base entera con las potencias de base racional. Da un ejemplo.

EJEMPLO 4

Observen la imagen en la que los rectángulos azul y amarillo tienen igual área. ¿Cuál es el valor de x?



1. Calcula el área del rectángulo azul.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}\right)^3$$
$$= \left(\frac{4}{15}\right)^3$$

2. Como ambos rectángulos tienen igual área, entonces, el área del rectángulo amarillo también es

$$\left(\frac{4}{15}\right)^3 \text{u}^2$$

3. Calcula el valor de x dividiendo el área del rectángulo por la medida del lado conocido $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

$$\left(\frac{4}{15}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{15} : \frac{1}{2}\right)^3$$
$$= \left(\frac{4}{15} \cdot 2\right)^3$$
$$= \left(\frac{8}{15}\right)^3$$

4. Para comprobar el valor de x, calcula el producto de x por la medida del lado conocido.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}\right)^3$$
$$= \left(\frac{8}{30}\right)^3$$
$$= \left(\frac{4}{15}\right)^3$$

5. Responde.

Como se cumple que las áreas son iguales, el valor de x es $\left(\frac{8}{15}\right)^3$ u.

Reflexiona con tu curso:

- ¿En qué situación de la vida real podrías aplicar la multiplicación y división de potencias de base racional?
- ¿Cómo se relacionan la multiplicación y la división de potencias con otros temas matemáticos que has estudiado antes?

BDA U1_ACT_36 a 39

Crecimiento y decrecimiento exponencial

La profesora Apolinaria García Cancino es una de las mujeres destacadas en uno de los cuadernillos de la colección INSPIRADORAS, que tiene como objetivo promover el conocimiento en estudiantes sobre el desarrollo en las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemática.

Hace más de 30 años investiga microorganismos, específicamente las bacterias: estos seres vivos no se ven a simple vista y para observarlos es necesario utilizar un microscopio.

El conjunto de bacterias llamado microbiota nos ayuda a estar sanos. Otras incluso en baja cantidad, nos producen enfermedades. Apolinaria se ha dedicado a investigar las que pueden producir cáncer gástrico. Tras examinar por mucho tiempo la bacteria patógena *Helicobacter pylori*, creó el primer probiótico patentado para prevenir esta enfermedad.

Apolinaria García Cancino

Conecta con **Biología**

¿Qué es la microbiota?

En cursos anteriores, has estudiado en **Biología** las características de ciertos microorganismos y sus efectos en la salud humana.

Sobre nuestra piel, intestino, tracto respiratorio y boca habitan millones de microorganismos, como virus, bacterias, hongos y otros microbios. La función de la microbiota es que puedas metabolizar lo que comes, fortalecer el sistema inmunológico para que te proteja de patógenos, además de sintetizar vitaminas y compuestos que nutren el cuerpo.

Fuente: Inspiradoras STEM (11 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_25

- Comenta con tu curso lo que entiendes por microbiota.
- Respecto de la investigación realizada por la profesora Apolinaria, ¿qué opinión tienes? Fundamenta tu respuesta.

Crecimiento exponencial

Cuando se modela una situación de **crecimiento exponencial**, la base de la potencia es mayor que 1.

Existen diferentes situaciones que pueden modelarse por medio de un **crecimiento exponencial**. En el ejemplo se presenta una.

Ejemplo 1

Un grupo de investigadores estudia cierto tipo de bacteria que produce una enfermedad. Luego de diferentes observaciones, determinan que cada vez que transcurre 1 minuto se duplica. En un comienzo se tiene una bacteria, como se muestra a continuación:

Comienzo ▶

1 minuto ▶

2 minutos ▶

¿Qué expresión permite modelar la cantidad de bacterias luego de n minutos?

1. Se representan los datos en una tabla.

Cantidad de bacterias		
Minuto	Total de bacterias	
0	1	→ $2^0 = 1$
1	2	→ $2^1 = 2$
2	4	→ $2^2 = 4$
3	8	→ $2^3 = 8$

Cantidad de bacterias		
Minuto	Total de bacterias	
4	16	→ $2^4 = 16$
5	32	→ $2^5 = 32$
6	64	→ $2^6 = 64$
7	128	→ $2^7 = 128$

2. Relaciona los datos con una potencia.

   Considerando una potencia de base 2 e incrementando el exponente, se obtienen los valores de la tabla.

3. Responde.

   La expresión que modela la cantidad de bacterias luego de n minutos es 2^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- En la expresión que modela la cantidad de bacterias, ¿n puede pertenecer al conjunto de los números enteros? Comenta con tu curso tu respuesta.
- ¿Cómo explicarías lo que es el crecimiento exponencial?

BDA U1_ACT_40 U1_AUD_1

Decrecimiento exponencial

Cuando la base de una potencia es **mayor que 0 y menor que 1**, se está modelando un **decrecimiento exponencial**.

A continuación, modelarás un proceso de **decrecimiento exponencial** en el contexto de la actividad económica de una familia quechua en el norte de Chile.

EJEMPLO 2 Actividad agrícola de los **quechuas**

Las comunidades quechua de Tarapacá se dedican principalmente a la agricultura. En Ollagüe, la agricultura se efectúa en sistemas de terrazas ubicadas en las quebradas aledañas protegidas de las heladas, como las de Puquios, Cohasa, Del Inca, Caichape y Amincha, en las que se cultivan papa y alfalfa. En Río San Pedro, en cambio, la actividad agrícola desapareció hace años por la falta de agua y el consecuente abandono de la población.

Fuente: Chile Precolombino (11 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU1_26

Valle del Río San Pedro.

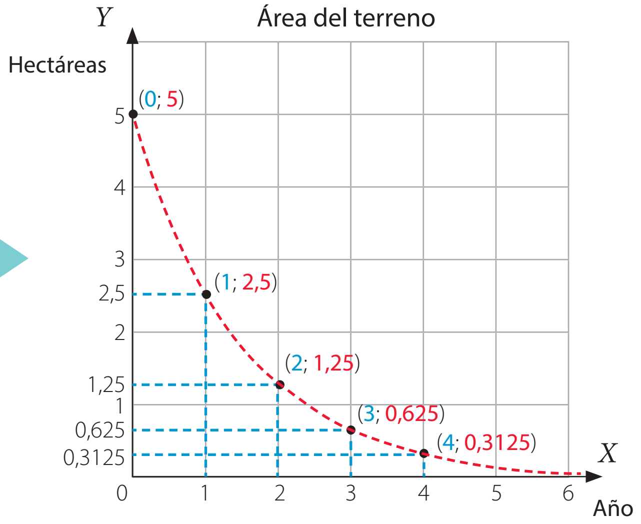
Una familia quechua tiene un terreno de 5 hectáreas que destina a la agricultura. Los últimos años, el terreno destinado a la agricultura disminuye por los cambios inesperados en el clima. El área del terreno (y) varía de acuerdo con la siguiente expresión: $y = 5 \cdot 0{,}5^x$ hectáreas, en que x corresponde al tiempo transcurrido en años desde que se iniciaron las variaciones climáticas. ¿Cuál es la gráfica que representa lo anterior?

1. Representa en una tabla algunos valores.

Área del terreno					
Año	0	1	2	3	4
Hectáreas	$5 \cdot 0{,}5^0 = 5$	$5 \cdot 0{,}5^1 = 2{,}5$	$5 \cdot 0{,}5^2 = 1{,}25$	$5 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}625$	$5 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}3125$

2. Responde ubicando los puntos en el plano cartesiano y construye la gráfica.

En el eje X ubicas los años, en el eje Y anotas las hectáreas, luego representas los respectivos puntos. La curva segmentada representa la gráfica, como se muestra a continuación.

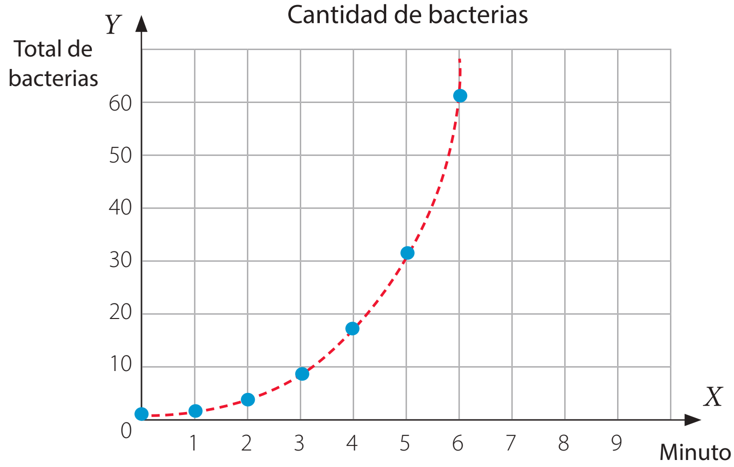


» EJEMPLO 3

En el EJEMPLO 1 se determinó que la expresión que modela la cantidad de bacterias luego de n minutos es 2^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Después de construir la gráfica, ¿es correcto afirmar que transcurridos 14 minutos se tendrán más de 15 000 bacterias? Responde utilizando propiedades de potencias.

1. Construye la gráfica.

Considerando la tabla del **EJEMPLO 1**, en el eje X se anotan los minutos, mientras que en el eje Y, la cantidad de bacterias. Luego su gráfica corresponde a la curva segmentada.



2. Utiliza propiedades de potencias.

Del **EJEMPLO 1** se tiene que $2^7 = 128$. Utilizando propiedades de potencia se tiene:

$2^{14} = 2^7 \cdot 2^7$ ← Descompones 2^{14} en 2^7 y 2^7.

$= 128 \cdot 128$ ← Reemplazas el valor de la potencia 2^7.

$= 16\,384$ ← Resuelves la multiplicación.

3. Responde.

Ya que el valor de 2^{14} es 16 384, es correcto afirmar que en 14 minutos se tendrán más de 15 000 bacterias.

- ¿La gráfica obtenida es creciente o decreciente? Explica a tu curso cómo lo sabes.
- ¿Qué entiendes por crecimiento y decrecimiento exponencial? Comenta con tu curso.

» Para finalizar la **Lección 2...**

- ¿Expusiste tus ideas de manera coherente y fundamentada?, ¿por qué?
- En las actividades grupales, ¿trabajaste en equipo de forma responsable y proactiva? Explica.
- ¿Elaboraste representaciones de acuerdo con las necesidades de la actividad? Justifica.
- ¿En qué otras situaciones aplicarías lo aprendido?, ¿por qué?
- ¿Reconoces que el uso de los contenidos estudiados se aplica en Ciencia y Tecnología? ¿En qué te basas para responder lo anterior?

BDA U1_ACT_41 a 44

Síntesis de Unidad 1 · Números

Lección 1 » Operatoria en los números racionales

» Aprendiste...

Conjunto de los números racionales

Está compuesto por todos los números del conjunto

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Adición y sustracción de números racionales

Para resolver una adición o sustracción de fracciones, se puede considerar lo siguiente:

Adición: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \left(\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \right)$

Sustracción: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \left(\frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d} \right)$

En las que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, y $d \neq 0$.

Multiplicación y división de números racionales

Para resolver una multiplicación o una división de fracciones, se puede considerar lo siguiente:

Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right)$

División: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c} \right)$

En las que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

Operaciones combinadas

Para resolver operaciones combinadas, debes considerar la prioridad en las operaciones:

1.º Paréntesis.

2.º Potencias.

3.º Multiplicaciones y/o divisiones.

4.º Adiciones y/o sustracciones.

¿Trabajaste en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos?

» Lograste...

- Resolver problemas de manera reflexiva en el ámbito escolar, familiar y social, utilizando modelos y rutinas así como aplicando de manera creativa conceptos y criterios.
- Reconocer la importancia del trabajo manual e intelectual así como forma de desarrollo personal, familiar, social y de contribución al bien común.

¿En qué situación has tenido que aplicar de manera creativa lo aprendido en esta lección?

¿Cómo ha contribuido el estudio de estos contenidos a tu desarrollo personal y académico?

» Aplicaste...

- La resolución de problemas utilizando calculadora.
- La evaluación de procesos y la comprobación de resultados y soluciones dadas.
- La fundamentación de conjeturas usando lenguaje algebraico.

Lección 2 » Potencias

» Aprendiste...

Potencias de base y exponente entero

Potencia	Base	Exponente	Signo del valor de la potencia
a^n	$a \in \mathbb{Z}^+$	n par o impar	Positivo
	$a \in \mathbb{Z}^-$	n par	Positivo
		n impar	Negativo

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, con $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$

Multiplicación y división de potencias

Si $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces:

- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\dfrac{c}{d}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}\right)^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m : \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n : \left(\dfrac{c}{d}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}\right)^n$

Potencias de base racional y exponente entero

Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces:

- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0 = 1$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ $n \in \mathbb{N}$
- $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$, con $n, m \in \mathbb{Z}$

Crecimiento y decrecimiento exponencial

- **Crecimiento exponencial**
  La base de la potencia es **mayor que 1**.
- **Decrecimiento exponencial**
  La base de la potencia es **mayor que 0** y **menor que 1**.

¿Demostraste interés, esfuerzo, perseverancia en la resolución de problemas reales?

» Lograste...

- Exponer ideas, opiniones, convicciones, sentimientos y experiencias de manera coherente y fundamentada, haciendo uso de diversas y variadas formas de expresión.
- Trabajar en equipo de manera responsable, construyendo relaciones basadas en la confianza mutua.

¿Cómo explicarías a tu curso el concepto de potencia utilizando tus propias palabras?

¿Cómo ha influido el trabajo en equipo en tu aprendizaje de los conceptos de esta lección?

» Aplicaste...

- La resolución de problemas descomponiéndolos en subproblemas más sencillos.
- El uso de lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados.
- La representación y ejemplificación utilizando situaciones familiares para resolver problemas.

BDA U1_ACT_45 y 46

Unidad

2 Álgebra y funciones

Un estilo de vida saludable se puede resumir en las siguientes acciones: consumir una dieta equilibrada, tener una higiene personal adecuada, mantener una calidad de sueño óptimo, realizar ejercicio físico cotidiano, evitar fumar, no consumir drogas ni alcohol, mantener una actitud positiva y evitar el estrés innecesario.

Fuente: Gaceta CCH (06 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_27

En esta unidad estudiarás los productos notables y los sistemas de ecuaciones lineales, lo que te será útil para la resolución de diversos problemas relacionados con hábitos de vida saludable y otros ámbitos de interés.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_28* y encontrarás una serie de actividades orientadas a mantener tu bienestar físico y emocional.

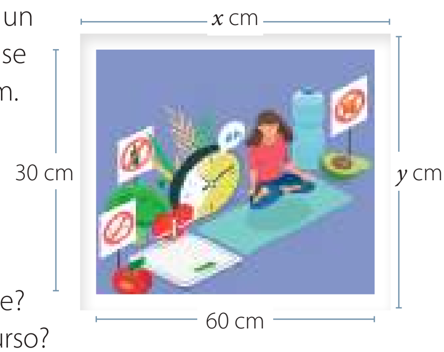
Actualmente es muy importante mantener en equilibrio nuestra salud física y mental para tener una vida plena.

1. ¿Por qué crees que es importante mantener un estilo de vida saludable?
2. ¿Qué actividades de tu vida diaria consideras saludables?, ¿por qué?
3. ¿Qué beneficios crees que tiene realizar actividad física en grupo y al aire libre?
4. A partir de la imagen nombra hábitos de vida saludable y explica por qué cada uno de ellos favorece tu desarrollo físico y personal.

Habilidades del **siglo XXI**

Para fomentar un estilo de vida saludable, un grupo de estudiantes confeccionó el afiche que se muestra en la imagen, con $x > 60$ cm e $y > 30$ cm. Junto con tu curso, respondan:

- ¿Cómo calcularían el perímetro del marco del afiche? ¿Qué tarea realizaría cada uno para determinarlo?
- ¿Cómo calcularían el área del marco del afiche? ¿Cómo compartirían su resultado al resto del curso?



Conocimientos previos

- Estos contenidos te ayudarán a abordar el trabajo de esta unidad.

Expresiones algebraicas

Una **expresión algebraica** es aquella en que se combinan letras, números y operaciones. Por ejemplo, $12a^3b$, con 12 el coeficiente numérico y a^3b el factor literal.

En una expresión algebraica se llaman **términos semejantes** a aquellos que tienen el mismo **factor literal**. Por ejemplo, $5a^2b$ y $-7a^2b$ tienen el mismo factor literal.

Para **sumar o restar expresiones algebraicas**, se asocian los términos semejantes y luego se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se conserva el factor literal. Por ejemplo:

$$2a^4b + y - 7a^4b + 3y = (2a^4b - 7a^4b) + (y + 3y) = -5a^4b + 4y$$

Para **multiplicar expresiones algebraicas**, puedes multiplicar los coeficientes numéricos de los términos y los factores literales según corresponda.
Ejemplos: $3a^2 \cdot 2a = 6a^3$, $4m \cdot (2x - 3y) = 8mx - 12my$.

Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que contiene una o más incógnitas. Una **ecuación lineal con coeficientes racionales** puede ser de las siguientes formas: $ax + b = c$, $ax - b = c$; $ax + b = cx + d$; $b = ax + c$; entre otras. Con a, b, c, d números racionales y $a \neq 0$.

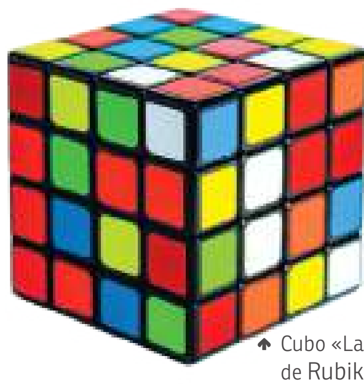
- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? Explica cómo podrías resolverlas.

BDA U2_ACT_1 U2_VID_1

Lección 1

Productos notables

Cuadrado y cubo de un binomio



Cubo «La venganza de Rubik».

Un **producto notable** es un producto que puede obtenerse sin resolver directamente la multiplicación.

Un **binomio** es una expresión algebraica con dos términos algebraicos.

La ingesta regular de frutas es fundamental para la nutrición por sus aportes de agua, vitaminas, minerales, fibra y antioxidantes. Este conjunto de elementos no solo es necesario, sino que desempeña un papel fundamental en la salud digestiva, cardiovascular e inmunológica, además de contribuir en la prevención de enfermedades crónicas, entre otros beneficios.

Fuente: Noticias Universidad de Concepción (6 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_29

En un concurso de comida se realiza el desafío de presentar de una forma innovadora una manera de comer al menos 4 porciones de frutas diferentes en un día con el fin de motivar la alimentación saludable.

Un grupo presentó un cubo de frutas como se muestra en la imagen. Se inspiraron en el cubo llamado «La venganza de Rubik», formado por 64 cubitos de igual medida.

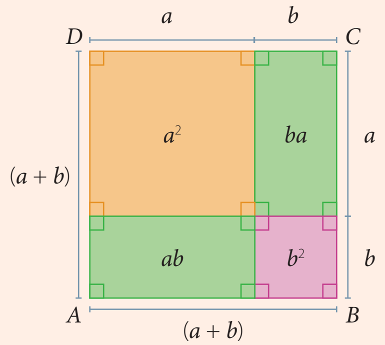
Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_30* para revisar los meses de cosecha de variadas frutas según la zona de Chile donde te encuentres.

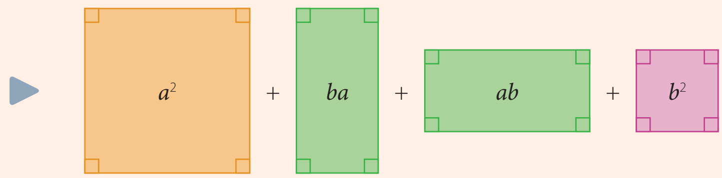
- ¿Qué figura geométrica se forma en la base del cubo de frutas?
- ¿Cuáles de tus conocimientos previos piensas que vas a aplicar en este contenido?
- Si la arista del cubo de frutas mide $(2x + y)$ cm, ¿qué expresión representa el área mínima que debe tener un plato para poder presentar este diseño?
- ¿Crees que sería un plato saludable?, ¿por qué?
- ¿Cómo crees que se relacionan los productos notables con el cálculo del área de cuadrados y rectángulos? Comenta con tu curso.

Cuadrado de un binomio

Cálculo del área del cuadrado *ABCD* de la figura.

Recuerda que por la propiedad conmutativa se cumple la siguiente igualdad:
$ab = ba$





$$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

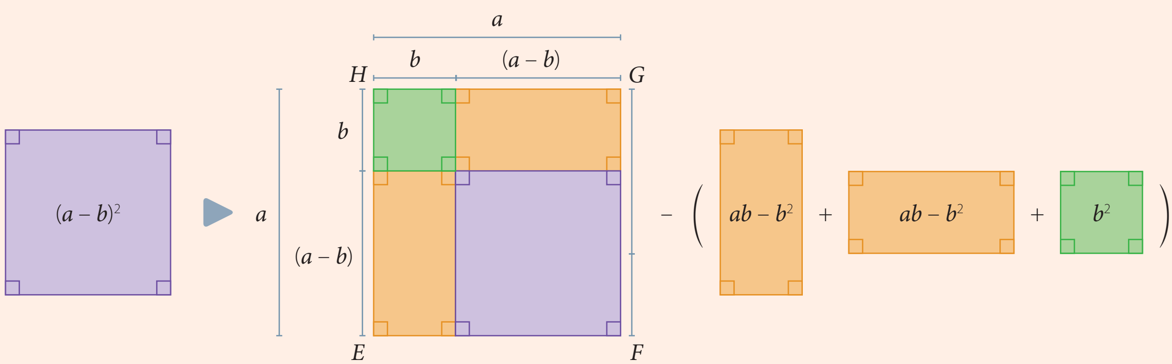
Área cuadrado amarillo: $a \cdot a = a^2$
Área rectángulo verde: $a \cdot b = ab$
Área cuadrado morado: $b \cdot b = b^2$

Área total
$a^2 + 2ab + b^2$

También puedes multiplicar las medidas de los lados del cuadrado.

$$(a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cálculo del área del cuadrado de lado $(a - b)$ de la figura.



$$(a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Área cuadrado *EFGH*: $a \cdot a = a^2$
Área rectángulo amarillo: $b \cdot (a-b) = ab - b^2$
Área cuadrado verde: $b \cdot b = b^2$

Área total

$a^2 - (ab - b^2 + ab - b^2 + b^2)$
$= a^2 - (2ab - b^2)$
$= a^2 - 2ab + b^2$

También puedes multiplicar las medidas de los lados del cuadrado.

$$(a-b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b) - b\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término, más (o menos si el binomio es una diferencia) el doble del producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

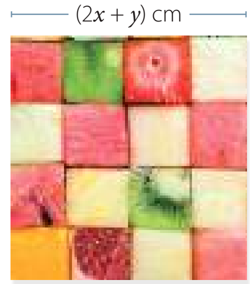
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

BDA U2_ACT_2

A continuación, aplicarás el **cuadrado de un binomio** a situaciones concretas en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 1

En la imagen se muestra la base del cubo de frutas del concurso anterior. ¿Cuál es la superficie mínima que utilizarán estas frutas en un plato?



1. Escribe la expresión del área (A) y aplica la definición del cuadrado de un binomio.

   Cuadrado del primer término. Doble del producto de los términos.

   $$A = (2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2$$ Cuadrado del segundo término.

2. Aplica las propiedades de las potencias y resuelve.

   $$A = (2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

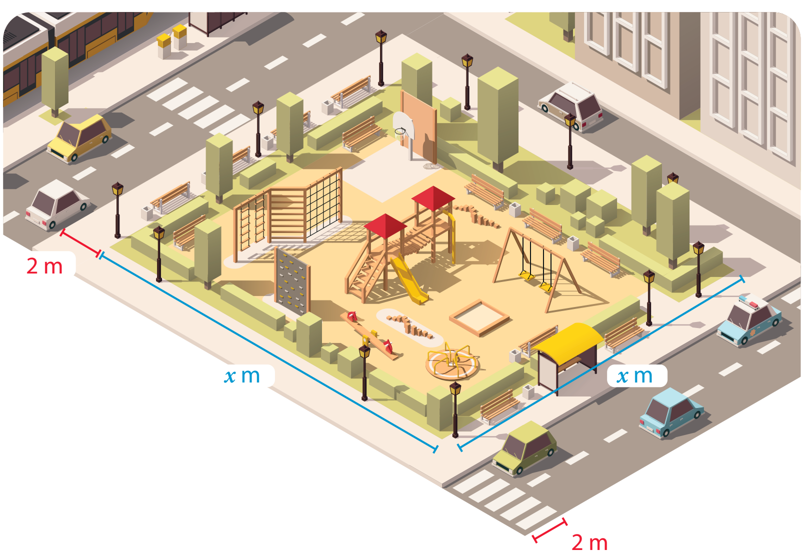
3. Responde.

   La superficie mínima que utilizarán estas frutas en el plato es $(4x^2 + 4xy + y^2)$ cm^2.

Ejemplo 2

Se quiere diseñar un jardín en una zona urbana con el objetivo de promover la salud y el bienestar de la comunidad. Una parte de él se debe destinar a un área de juegos para niños y otra para hacer ejercicios al aire libre. El diseño del jardín contribuirá directamente a fomentar un estilo de vida activo y saludable para la comunidad. Esta acción está en concordancia con el Objetivo de Desarrollo Sostenible **ODS 3 Salud y bienestar**, desarrollado por la Organización de Naciones Unidas (ONU) para garantizar una vida sana y favorecer el bienestar de todos en todas las edades. Para ello, se necesita saber el área de este jardín, que debe tener forma cuadrada y estar rodeado por un camino de baldosas de ancho 2 m. ¿Qué expresión representa el área del jardín?

1. Haz una representación del jardín descrito.



2. Representa el área (A) del jardín completo.

   Cada lado del jardín, incluido el camino de baldosas, mide $(x + 4)$ m. Por lo tanto, su área es:

   $$A = (x + 4)^2$$

3. Aplica la definición del cuadrado de un binomio y resuelve.

   $$\begin{aligned} A &= (x + 4)^2 \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 \\ &= x^2 + 8x + 16 \end{aligned}$$

4. Responde.

   El área del jardín está representada por la expresión $(x^2 + 8x + 16)$ m^2.

- ¿Por qué el tercer término del cuadrado de un binomio siempre es positivo?

EJEMPLO 3 » Conecta con **Historia, Geografía y Ciencias Sociales**

Como has visto en la asignatura de **Historia, Geografía y Ciencias Sociales**, dentro de los componentes y dinámicas del sistema económico y financiero, la ciudadanía se destaca como agente de consumo responsable. Esto es fundamental para tomar decisiones informadas y éticas en el ámbito económico y financiero.

Supón que tienes la tarea de administrar un presupuesto familiar para cubrir gastos básicos y las necesidades de la familia durante un mes. Para ello debes tener en cuenta diferentes factores, como el costo de la vivienda, los servicios básicos, los alimentos, el transporte y otras necesidades de la familia. En este contexto, se sabe que la suma de los cuadrados de los gastos mensuales de arriendo y alimentación es igual a $400 000 millones, mientras que el producto de estos gastos es igual a $205 000 millones. ¿Cuál es la suma de los gastos mensuales entre arriendo y alimentación?

1. Plantea una ecuación.

Sabes que el cuadrado de un binomio lo puedes representar como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Entonces, puedes definir lo siguiente:

a: Gasto mensual de arriendo. b: Gasto mensual en alimentación.

Identifica en la expresión del cuadrado de binomio los datos del problema.

$a^2 + b^2 = 400\,000\,000\,000$ ▶ Suma de los cuadrados de los gastos mensuales de arriendo y alimentación.

$a \cdot b = 205\,000\,000\,000$ ▶ Producto de los gastos mensuales de arriendo y alimentación.

Reemplaza estos valores en la expresión del cuadrado de binomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot ab$$
$$(a+b)^2 = 400\,000\,000\,000 + 2 \cdot 205\,000\,000\,000$$

2. Resuelve.

$$(a+b)^2 = 400\,000\,000\,000 + 2 \cdot 205\,000\,000\,000$$
$$(a+b)^2 = 400\,000\,000\,000 + 410\,000\,000\,000$$
$$(a+b)^2 = 810\,000\,000\,000 \; / \sqrt{\;}$$
$$a+b = \sqrt{810\,000\,000\,000}$$
$$a+b = 900\,000$$

La **raíz cuadrada** de un número natural b corresponde a un único número positivo a que cumple: $a^2 = b$ y se representa como $\sqrt{b} = a$.

3. Responde.

La suma de los gastos mensuales de arriendo y alimentación es $900 000.

- Reflexiona junto con tu curso sobre cómo pueden utilizar sus conocimientos matemáticos y habilidades de análisis para tomar decisiones financieras responsables y contribuir a un sistema económico más justo, equitativo y sostenible.
- ¿Qué conocimientos previos utilizaste en la resolución del EJEMPLO 3?
- ¿Qué pasos del EJEMPLO 3 consideraste un desafío para resolver? Explica.
- Describe con tus palabras lo que entiendes por cuadrado de un binomio.
- ¿Cuándo la expresión $(a+b)^2$ es igual a $a^2 + b^2$, y cuándo la expresión $(a-b)^2$ es igual a $a^2 - b^2$? Explica.

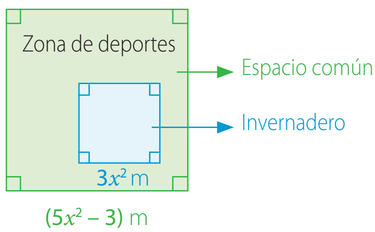
BDA U2_ACT_3 U2_AUD_1

Ejemplo 4

En un condominio hay un área común de forma cuadrada, como se muestra en la imagen.

En este espacio común se quiere levantar un invernadero cuadrado de lado $3x^2$ m. En el terreno restante, se quiere construir una zona para hacer deporte. Representa la situación y determina el área de esta última zona.

1. Representa el espacio común, el invernadero y la zona para hacer deporte.



2. Determina el área de la zona para hacer deporte.

   El área (A) de la zona para hacer deporte equivale a la diferencia entre el área del espacio común y la del invernadero.

   Espacio común — Invernadero

$$A = \underbrace{(5x^2 - 3)^2}_{\text{Espacio común}} - \underbrace{(3x^2)^2}_{\text{Invernadero}}$$

$$= (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 3 + 3^2 - 9x^4$$ → Aplica la definición del cuadrado de binomio y calcula la potencia del invernadero.

$$= 25x^4 - 30x^2 + 9 - 9x^4$$ → Reduce términos semejantes.

$$= (25x^4 - 9x^4) - 30x^2 + 9$$

$$= 16x^4 - 30x^2 + 9$$

3. Responde.

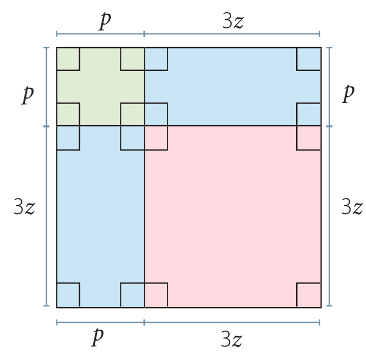
   El área de la zona para hacer deporte es $(16x^4 - 30x^2 + 9)$ m^2.

- ¿Qué es lo primero que haces al desarrollar un cuadrado de binomio?
- ¿Crees que abordaste de manera creativa la resolución de los ejemplos?, ¿por qué?
- ¿Intercambiaste opiniones con tu curso al resolver los ejemplos? Explica.
- ¿Piensas que intercambiar opiniones con tu curso aporta a tu aprendizaje?, ¿por qué?
- ¿Qué otras situaciones puedes resolver usando cuadrados de binomio?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_31* para saber más sobre el cuadrado de binomio.

EJEMPLO 5

Determina la expresión que representa la medida del lado de un cuadrado cuya área es $p^2 + 6pz + 9z^2$.



1. Representa el cuadrado con un dibujo.

   Considera lo siguiente:

   - p^2: área de un cuadrado de lado p.
   - $6pz$: suma de las áreas de dos rectángulos congruentes, por lo que el área de cada uno es $3pz$.
   - $9z^2$: área de un cuadrado de lado $3z$.

2. Observa la representación e identifica la medida del lado del cuadrado.

3. Responde.

   La medida del lado del cuadrado es $(p + 3z)$.

EJEMPLO 6

La completación de cuadrado es una técnica que permite representar un trinomio como una expresión que contenga un cuadrado de binomio. En el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, realiza lo siguiente:

Un **trinomio** es una expresión algebraica con tres términos algebraicos.

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

El valor de b lo **divides por 2**, y esta expresión la **elevas al cuadrado**, luego la **sumas y restas** a la expresión original.

Representa $x^2 - 6x + 15$ como una expresión que contenga un cuadrado de binomio.

1. Identifica el valor de b y calcula $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

   $x^2 - 6x + 15$ ▶ $b = -6$ $\quad \frac{b}{2} = -3$ $\quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 9$

2. Completa un cuadrado de binomio.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 15 &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 15 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 15 \\ &= (x - 3)^2 + 6 \end{aligned}$$

3. Responde.

   La expresión $x^2 - 6x + 15$ se puede representar como $(x - 3)^2 + 6$.

- ¿Qué utilidad tiene representar trinomios como el cuadrado de un binomio?
- ¿Por qué crees que se debe sumar y restar la misma cantidad para completar el cuadrado de binomio?
- ¿Cómo representarías $25a^2 + 30a + 18$ como una expresión que contenga un cuadrado de binomio?

BDA U2_ACT_4

Cubo de un binomio

El volumen del cubo de la figura 1 es igual a $(a+b)^3$. Si descompones el cubo de la figura 1 en cubos y prismas más pequeños, se obtienen los cuerpos con sus respectivos volúmenes de la figura 2.

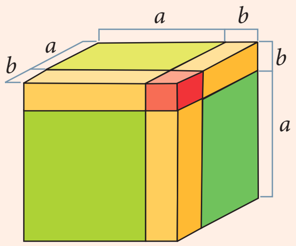


Figura 1

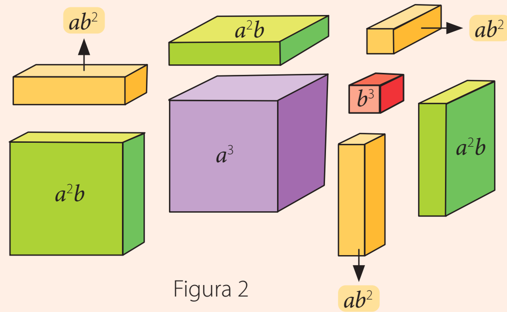


Figura 2

Al sumar los volúmenes de cada cuerpo de la figura 2, se obtiene el volumen del cubo de la figura 1.

$$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El **cubo de un binomio** corresponde a la multiplicación de un binomio por sí mismo tres veces, y se representa como $(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3$. Se tienen los siguientes casos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

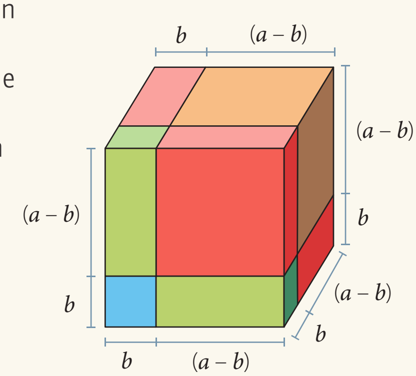
A continuación, deducirás la expresión del **cubo de un binomio** a partir de una situación concreta.

Ejemplo 7 » Conecta con **Artes Visuales**

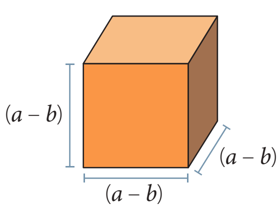
Como has visto en la asignatura de **Artes Visuales**, para los artistas tener un conocimiento general del espacio, en particular de las figuras planas y los cuerpos geométricos que lo conforman, les permite crear diseños en los que pueden realizar variaciones de las dimensiones y analizar en qué medida se afectan el área y el volumen para que con estas nuevas medidas puedan elaborar esculturas o diseños.

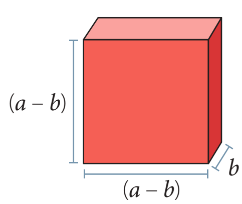
Un objeto con forma de cubo puede tener cambios en la medida de su arista de tal forma que se puede construir un nuevo cubo para el cual se puede expresar su volumen en términos de la arista del cubo original y de la cantidad en que se aumentó o se redujo esta.

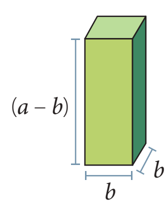
Representa el volumen del cubo anaranjado de la imagen utilizando el volumen de los otros cubos y prismas.

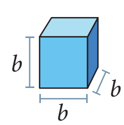


1. Represente las medidas de los cubos y prismas que conforman el cubo de la imagen.

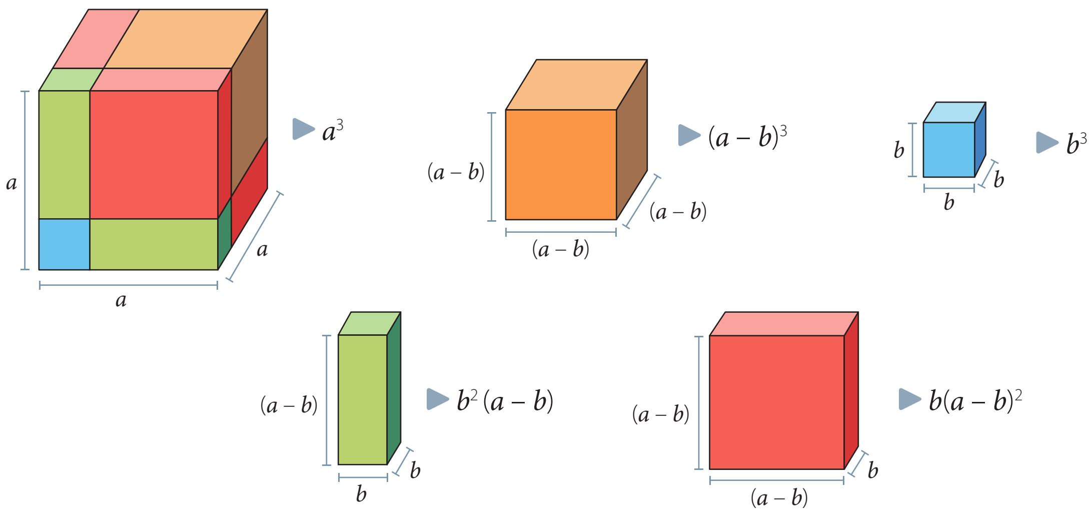




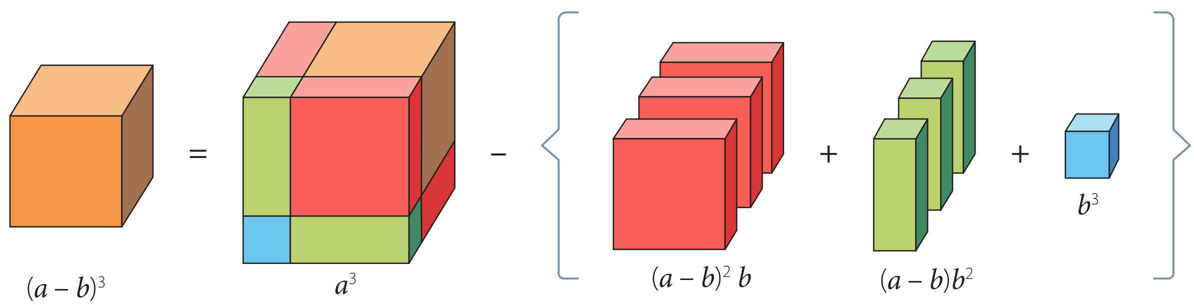




2. Representa el volumen de los cubos y de los prismas.



3. Determina el volumen del cubo anaranjado.



$$(a-b)^3 = a^3 - \{3b(a-b)^2 + 3b^2(a-b) + b^3\}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - \{3b(a^2 - 2ab + b^2) + 3b^2(a-b) + b^3\}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - \{3a^2b - 6ab^2 + 3b^3 + 3ab^2 - 3b^3 + b^3\}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - \{3a^2b - 3ab^2 + b^3\}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

4. Responde.

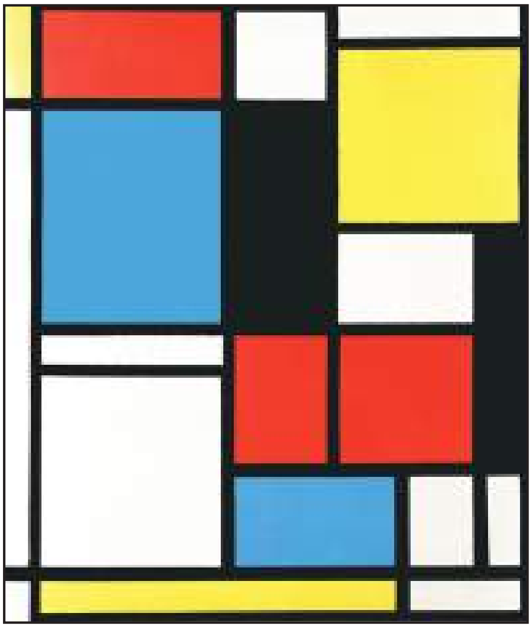
El volumen del cubo anaranjado se puede representar con la siguiente expresión: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

- ¿Qué conocimientos previos utilizaste en la resolución del **Ejemplo 7**?
- Explica con tus palabras lo que entiendes por cubo de un binomio.
- ¿Cuándo la expresión $(x+y)^3$ es igual a $x^3 + y^3$, y cuándo la expresión $(x-y)^3$ es igual a $x^3 - y^3$? Explica.
- Explica a tu curso cómo expresarías $(2a^2b + 3ab^2)^3$.
- ¿Qué es lo que ya sabes respecto al cuadrado y al cubo de un binomio?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_32* para saber más sobre el cubo de binomio.

BDA U2_ACT_5 a 8 U2_IMA_1

Suma por su diferencia



Composición en azul, rojo y amarillo.

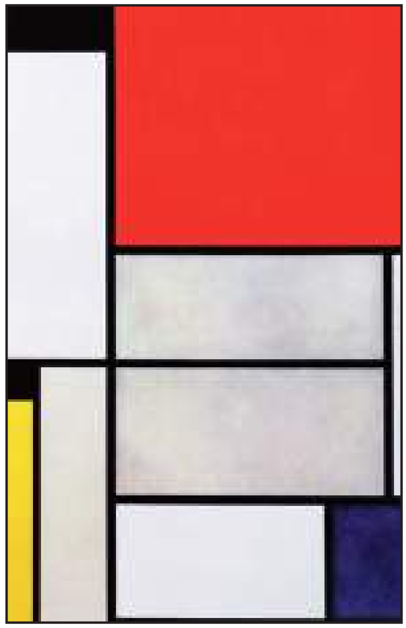
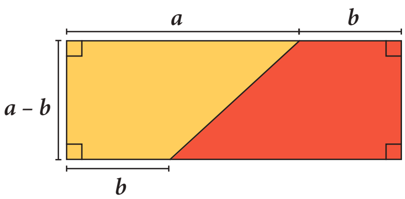
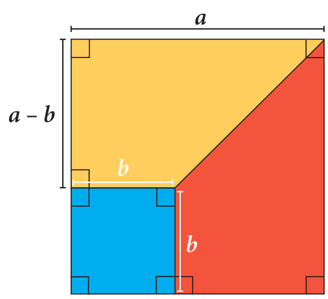


Tableau I.

Modelo 1



Modelo 2



Un artista que inspiró su creación en la matemática fue Piet Mondrian. Él pertenecía a un movimiento artístico llamado "Neoplasticismo" que está dentro del arte abstracto. Para Mondrian era posible conseguir la belleza en sus obras utilizando líneas rectas y colores primarios, es decir, el azul, amarillo y rojo.

Este artista en sus obras dividía toda la superficie del lienzo en rectángulos y cuadrados de diferentes medidas mediante algunas fórmulas exactas de proporciones matemáticas. Estas formas geométricas al distribuirse por el cuadro logran un resultado equilibrado y muy agradable de ver para el público. Luego de hacer esta división del espacio pintaba algunos de estos rectángulos y cuadrados de colores primarios y además blanco.

Fuente: Museo Artequin (18 de noviembre de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_33

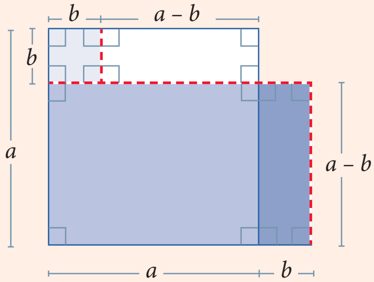
Un grupo de estudiantes debe desarrollar un proyecto de Artes que consiste en crear una obra inspirada en el trabajo de Piet Mondrian. El grupo A divide su lienzo como se muestra en el modelo 1. El grupo B diseñó el modelo 2, en el que pintarán las mismas áreas con color rojo y amarillo que el grupo A, pero agregarán un cuadrado azul.

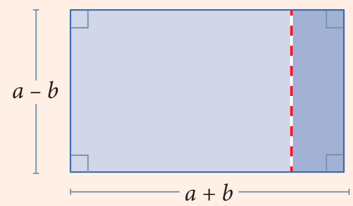
- ¿Qué expresión representa el área total del modelo 1?
- ¿Qué expresión representa el área total del modelo 2?
- ¿Qué expresión representa el área que se pintará con azul?
- ¿Cómo puedes relacionar estas expresiones con el área del modelo 1?

Ingresa *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_35* para conocer más artistas que han utilizado la matemática en sus obras.

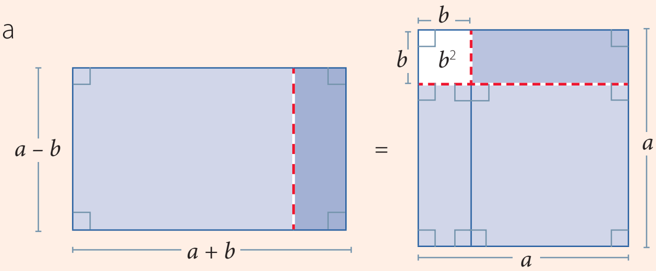
Suma por su diferencia

Cuando en un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ se aumenta un lado en $\boldsymbol{b}$ y se disminuye el otro lado en $\boldsymbol{b}$, se forma un rectángulo de largo $(a + b)$ y ancho $(a - b)$, como se muestra en la figura.





El área del rectángulo equivale al área coloreada de la siguiente figura:



Por lo tanto, sus áreas son equivalentes.

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

La **suma por su diferencia** corresponde al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

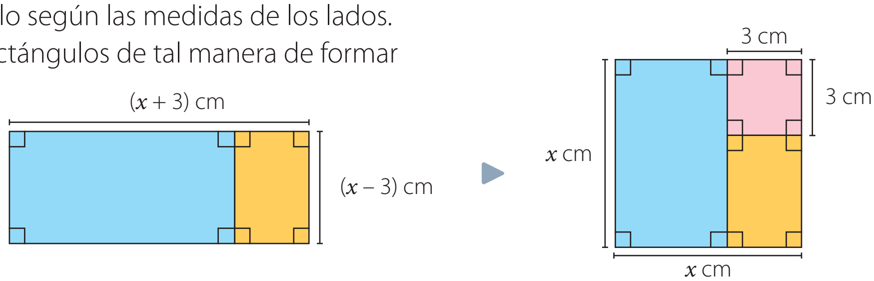
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

A continuación, aplicarás la **suma por su diferencia** en variadas situaciones en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 1

¿Cuál es el área de un rectángulo de lados $(x + 3)$ cm y $(x - 3)$ cm?

1. Dibuja el rectángulo y divídelo según las medidas de los lados. Luego, reubica uno de los rectángulos de tal manera de formar un cuadrado de lado x cm.



2. Si al área del cuadrado de lado x cm le restas el área del cuadrado de lado 3 cm, obtienes el área buscada.

$$(x^2 - 3^2)\ \text{cm}^2 = (x^2 - 9)\ \text{cm}^2$$

También puedes multiplicar las medidas de los lados del rectángulo.

$$(x + 3)(x - 3) = x \cdot (x - 3) + 3 \cdot (x - 3) = x \cdot x - 3 \cdot x + 3 \cdot x - 3 \cdot 3 = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$$

El área del rectángulo es $(x^2 - 9)$ cm².

BDA U2_ACT_9

» Ejemplo 2

Jorge tiene un jardín de forma rectangular de $(5a - 7)$ m de ancho y $(5a + 7)$ m de largo. ¿Cuál es el área del jardín?

1. Representa el área (A) del jardín. $A = (5a + 7)(5a - 7)$
2. Aplica la definición de la suma por su diferencia y resuelve.

$$A = (5a + 7)(5a - 7)$$

Cuadrado del primer término. Cuadrado del segundo término.

$$= (5a)^2 - 7^2$$
$$= 25a^2 - 49$$

3. Responde.

   El área del jardín es $(25a^2 - 49)$ m^2.

» Ejemplo 3

En un taller deportivo se decide pagar por el uso de una piscina durante cuatro días. El primer grupo que asiste está compuesto por 22 personas y el precio por cada una es \$18 000. ¿Cuánto deberán pagar en total? Realiza tus cálculos usando la suma por su diferencia.

1. Determina la operación que resuelve el problema.

   Se debe multiplicar 22 por 18 000 para obtener el total que se debe pagar.
   Es decir, se debe resolver $22 \cdot 18\,000$.

2. Descompón los factores y aplica la suma por su diferencia.

$$\begin{aligned} 22 \cdot 18\,000 &= 22 \cdot 18 \cdot 1\,000 \\ &= (20 + 2) \cdot (20 - 2) \cdot 1\,000 \\ &= (20^2 - 2^2) \cdot 1\,000 \\ &= (400 - 4) \cdot 1\,000 \\ &= 396 \cdot 1\,000 \\ &= 396\,000 \end{aligned}$$

3. Responde.

   En total, se deberán pagar \$396 000.

Sophie Germain
(1776-1831)

La matemática francesa Sophie Germain se destacó por sus investigaciones realizadas acerca de la teoría de números. Se dice que un número natural es un número primo de Germain si el número n es primo y $2n + 1$ también lo es. Los números primos de Sophie Germain inferiores a 200 son: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179 y 191. Una de sus más famosas identidades, más comúnmente conocida como identidad de Sophie Germain, expresa que para dos números x e y se cumple lo siguiente:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$$

Fuente: Mujeres con Ciencia (8 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_36*

- ¿Qué productos notables puedes aplicar para verificar la identidad de Sophie Germain?

Para saber más acerca de los aportes de Sophie Germain a la Matemática y la Física, observa el siguiente video: *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_37*

Ejemplo 4

Catalina quiere resolver la siguiente multiplicación usando productos notables:

$$\left(-\frac{2x^2}{y}+4z\right)\cdot\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)$$

Les pregunta a dos compañeros, Juan y Carolina, si pueden identificar el producto notable que pueden aplicar en la multiplicación.

- ¿Quién está en lo correcto?
- ¿Cuál es el resultado?

1. Aplica la propiedad conmutativa de la adición.

$$\left(-\frac{2x^2}{y}+4z\right)\cdot\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)=\left(4z+\left(-\frac{2x^2}{y}\right)\right)\cdot\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)$$

2. Aplica la propiedad de la conmutatividad de la multiplicación.

$$\left(4z+\left(-\frac{2x^2}{y}\right)\right)\cdot\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)=\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)\cdot\left(4z+\left(-\frac{2x^2}{y}\right)\right)$$

3. Expresa la segunda adición como una sustracción.

$$\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)\cdot\left(4z+\left(-\frac{2x^2}{y}\right)\right)=\underbrace{\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)\cdot\left(4z-\frac{2x^2}{y}\right)}_{\text{Suma por su diferencia.}}$$

Cuando **restas** un número equivale a **sumar** su **inverso aditivo**.

4. Aplica la definición de la suma por su diferencia.

$$\left(4z+\frac{2x^2}{y}\right)\cdot\left(4z-\frac{2x^2}{y}\right)=(4z)^2-\left(\frac{2x^2}{y}\right)^2=16z^2-\frac{4x^4}{y^2}$$

5. Responde.

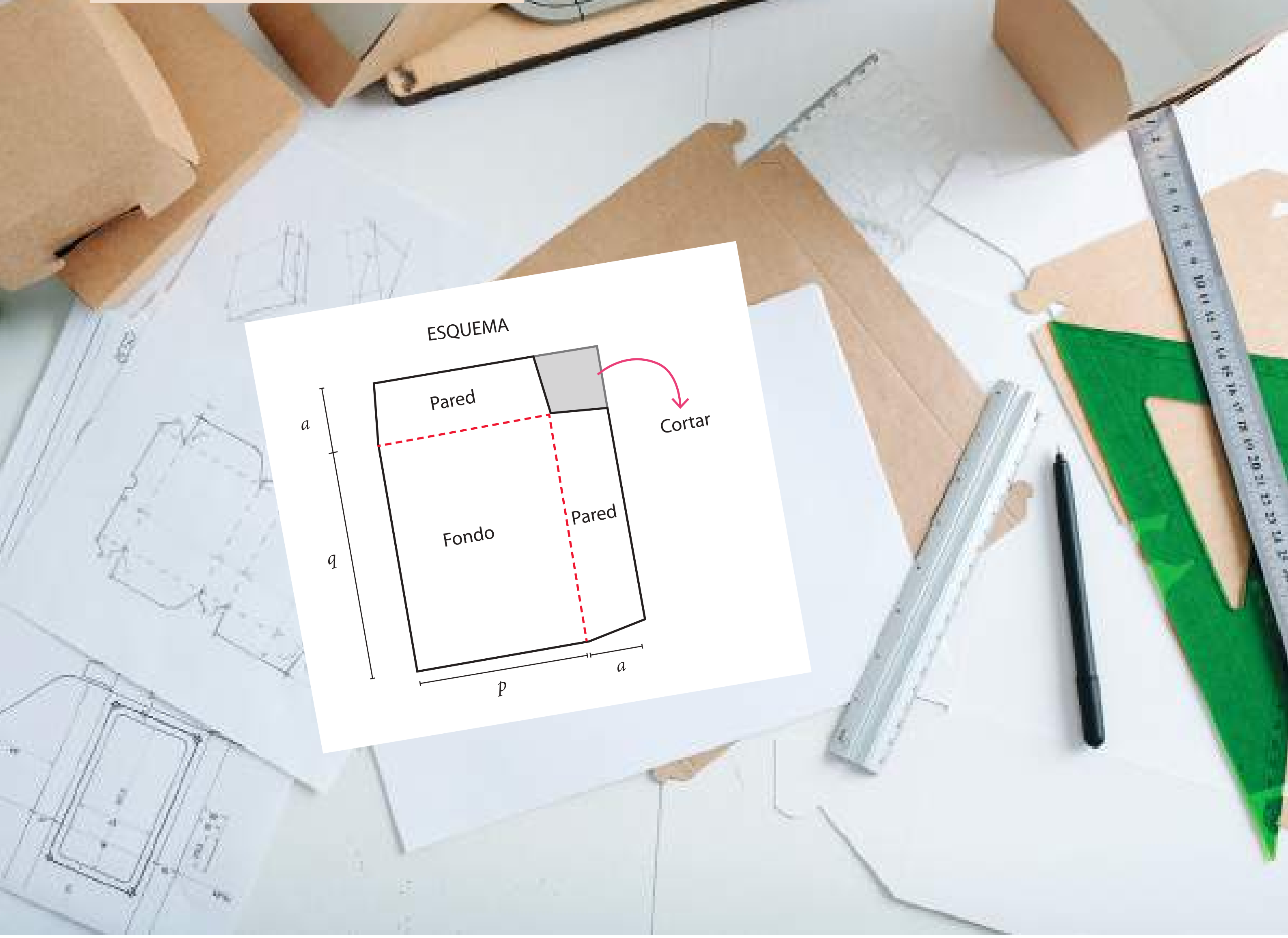
- Carolina está en lo correcto.
- El resultado es $16z^2-\dfrac{4x^4}{y^2}$.

- ¿Qué haces para calcular una suma por su diferencia? Explica.
- ¿Crees que abordaste de manera creativa la resolución de los ejemplos?, ¿por qué?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_38* para saber más sobre la suma por su diferencia.

BDA U2_ACT_10 a 13

Producto de binomios con un término en común



En Educación Tecnológica se planteó el desafío de crear alternativas a las cajas tradicionales para poder extraer objetos delicados de manera más simple.

Julieta pensó en una caja formada por dos partes idénticas, base y tapa. Cada parte con un fondo y dos paredes. Al unir las partes, a través de velcros, se forma la caja. Al quitar la tapa, el objeto en su interior se puede sacar fácilmente.

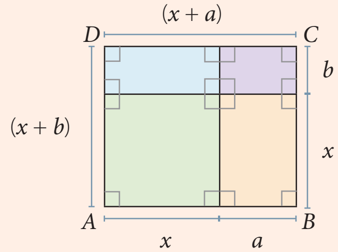
Aún no tiene claras las medidas de la caja, pero construirá cada parte con un trozo de cartón rectangular, como se muestra en el esquema.

- ¿Qué expresiones representan las medidas de los lados del cartón?
- ¿Qué expresiones representan el área del fondo, de las paredes y del cuadrado que se debe recortar?
- Según tus respuestas, ¿qué expresión representa el área del cartón?
- ¿Crees que este tipo de caja es creativa?, ¿por qué?
- ¿Qué diseño innovador propondrías tú?

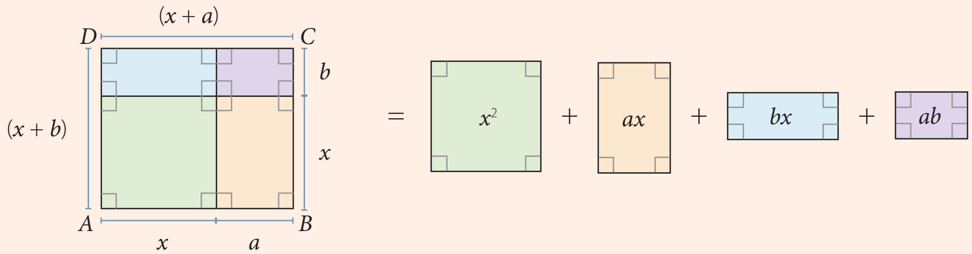
Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_39* para trabajar el cálculo de áreas con expresiones algebraicas.

Producto de binomios con un término en común

El rectángulo $ABCD$ se divide en un cuadrado y rectángulos, como se muestra en la figura.



El área del rectángulo $ABCD$ que se expresa como $(x + a)(x + b)$ equivale a la suma de las áreas del cuadrado y los rectángulos formados en él.



$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$ ▶ Aplica la propiedad distributiva.

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

El **producto de dos binomios con un término en común** $(x + a)(x + b)$ es igual al cuadrado del término común (x^2), más el producto de la suma de los dos términos no comunes por el término común $(a + b)x$, más el producto de los términos no comunes (ab).

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ▶ En este producto de binomios el término común es x.

Ahora, aplicarás el **producto de dos binomios con un término en común** en variadas situaciones en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 1

Calcula el producto 27 • 23 aplicando el producto $(x + a)(x + b)$.

1. Descompón aditivamente los factores. Considera que las descomposiciones deben tener un sumando en común.

$$27 \cdot 23 = (20 + 7)(20 + 3)$$

2. Aplica la definición del producto de binomios con un término en común y resuelve.

$$\begin{aligned} 27 \cdot 23 &= (20 + 7)(20 + 3) \\ &= 20^2 + (7 + 3) \cdot 20 + 7 \cdot 3 \\ &= 400 + 10 \cdot 20 + 7 \cdot 3 \\ &= 400 + 200 + 21 \\ &= 621 \end{aligned}$$

3. Responde.

   El producto 27 • 23 es 621.

BDA U2_ACT_14

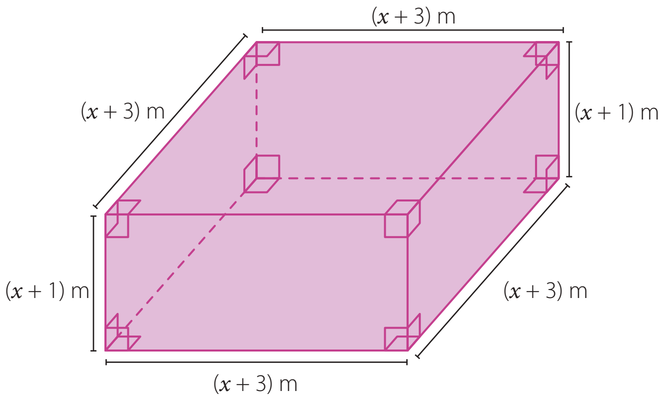
Ejemplo 2 Educación ambiental

Una forma de cuidar el agua es crear jardines sustentables que no necesiten agua en grandes cantidades. Estos jardines ayudan al medioambiente y a la salud, ya que las plantas contribuyen con la purificación del aire.

Imagina que estás participando en un proyecto comunitario para promover el cuidado del agua en tu barrio. Como parte de este proyecto, estás trabajando en un plan para crear jardines sustentables que requieran menos riego y, por lo tanto, ayuden a disminuir el uso del agua en la comunidad.

Además, estás colaborando con un equipo de arquitectos paisajistas para diseñar estas áreas verdes de manera eficiente y estética. En esta etapa del proyecto es fundamental calcular la cantidad de material que se usará para la construcción de los jardines. En primera instancia, necesitas hacer cajas sin tapa, como las de la imagen, en las que se pondrán las plantas de bajo consumo hídrico.

Si el modelo de las cajas es como el de la figura, ¿cuál es la cantidad de material que se necesita?



1. Determina las áreas que se deben calcular.

La cara basal tiene forma cuadrada, su área corresponde a $(x + 3)^2$ m^2.

Las 4 caras laterales son idénticas, tienen forma rectangular y su área corresponde a $(x + 1)(x + 3)$ m^2.

2. Determina el área total (A) de la caja sin tapa.

$$A = (x + 3)^2 + 4(x + 1)(x + 3)$$

3. Aplica los productos notables y reduce términos semejantes.

$$\begin{aligned} A &= (x + 3)^2 + 4(x + 1)(x + 3) \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 4 \cdot [x^2 + (1 + 3)x + 1 \cdot 3] \\ &= x^2 + 6x + 9 + 4x^2 + 16x + 12 \\ &= (x^2 + 4x^2) + (6x + 16x) + (9 + 12) \\ &= 5x^2 + 22x + 21 \end{aligned}$$

4. Responde.

Se necesitan $(5x^2 + 22x + 21)$ m^2 de material.

- ¿Qué haces para calcular el producto de dos binomios con un término común? Explica.
- Describe cómo puedes usar este producto notable como estrategia de cálculo mental para la multiplicación.
- ¿Qué errores cometiste al desarrollar el **Ejemplo 2**?, ¿qué puedes hacer para no volver a cometerlos?

EJEMPLO 3 » La ruca del **pueblo Mapuche**

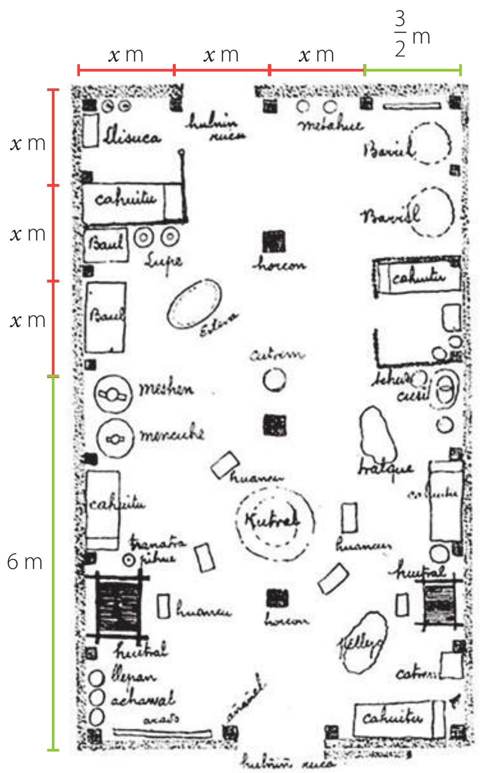
Las rucas de hoy en día se configuran a partir de una planta rectangular sin ventanas, un techo inclinado y una altura de 2 m en sus costados.

Su estructura principal es de madera maciza y se puede ver desde el interior, puesto que están cubiertas de elementos livianos, como paja y otros tallos. Sus dimensiones varían de acuerdo con la zona y la cantidad de integrantes de la familia, aunque se sabe que las más grandes pueden llegar a medir entre 12 y 15 m de largo por 7 a 10 m de ancho y hasta 6 m de alto en su punto superior. Algunos de los nombres de las partes de la vivienda son: «mellafma» (techo), «huñinruca» (puerta), «huenuruca» (cielo o techo secundario), «trafuca» (muros verticales), entre otros.

Generalmente la construcción de una ruca es comunitaria. Este acontecimiento es llamado «rucan».

En la distribución interior de la ruca todo gira en torno al «kultralhue» el lugar donde se enciende el fuego. Las camas se distribuyen en los costados; algunas tienen un segundo nivel que es para almacenamiento de provisiones. Las rucas no tienen ventanas, pero el orificio superior que está sobre el fuego permite un tiraje para el intercambio del aire entre el interior y el exterior.

Fuente: ArchDaily (8 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_40



Según las medidas registradas en la imagen, ¿cuál es la superficie del suelo que ocupa la ruca?

1. Determina las medidas del largo y el ancho de la base rectangular de la ruca.

Largo ▶ $(x + x + x + 6)$ m $= (3x + 6)$ m

Ancho ▶ $\left(x + x + x + \frac{3}{2}\right)$ m $= \left(3x + \frac{3}{2}\right)$ m

2. Determina el área (A) de la base de la ruca.

$$A = (3x + 6) \cdot \left(3x + \frac{3}{2}\right)$$

3. Aplica el producto de binomios con un término en común.

$$A = (3x + 6) \cdot \left(3x + \frac{3}{2}\right)$$
$$= (3x)^2 + \left(6 + \frac{3}{2}\right) \cdot 3x + 6 \cdot \frac{3}{2}$$
$$= 9x^2 + \frac{45}{2}x + 9$$

4. Responde.

La ruca ocupa $\left(9x^2 + \frac{45}{2}x + 9\right)$ m^2 del suelo.

- ¿Qué más te gustaría saber sobre este producto notable? Explica.

BDA U2_ACT_15

Ejemplo 4

Determina los factores cuyo producto ($m^2 + 2m - 15$) corresponde al desarrollo del producto de binomios con un término en común.

1. Aplica la definición del producto de binomios con un término en común.

   Se debe cumplir que $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

2. Identifica el término en común.

   En este caso, el término en común es m, ya que $(m)^2 = m^2$.

3. Identifica los términos distintos.

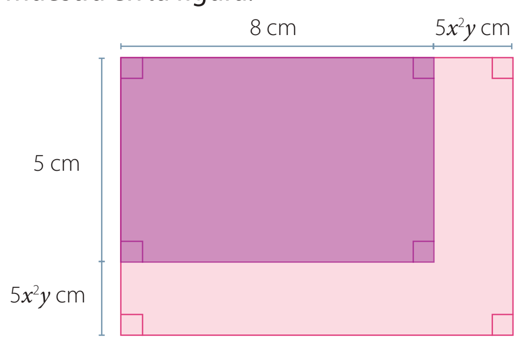
   Debes determinar dos números a y b tal que $(a + b) = 2$ y $(a \cdot b) = -15$.
   Los números son 5 y –3, ya que $5 + (-3) = 2$ y $5 \cdot (-3) = -15$.

4. Responde.

   Los factores son $(m + 5)$ y $(m - 3)$.

Ejemplo 5

Antonia modificó el diseño de una superficie rectangular de 8 cm por 5 cm aumentando su largo y ancho en $5x^2y$ cm, como se muestra en la figura.



¿Cuál es el área del nuevo rectángulo?

1. Determina las medidas del largo y el ancho del nuevo rectángulo.

   Largo ▶ $(8 + 5x^2y)$ cm   Ancho ▶ $(5 + 5x^2y)$ cm

2. Determina el área (A) del nuevo rectángulo.

$$A = (8 + 5x^2y) \cdot (5 + 5x^2y)$$

3. Aplica el producto de binomios con un término en común.

$$\begin{aligned} A &= (8 + 5x^2y) \cdot (5 + 5x^2y) \\ &= (5x^2y)^2 + (8 + 5) \cdot 5x^2y + 8 \cdot 5 \\ &= 25x^4y^2 + 65x^2y + 40 \end{aligned}$$

4. Responde.

   El área del nuevo rectángulo es $(25x^4y^2 + 65x^2y + 40)$ cm^2.

≫ Ejemplo 6

Una fotografía con forma rectangular se pondrá en un cuadro como el que se muestra a continuación:

¿Cuántos centímetros cuadrados (cm²) tiene la fotografía?

1. Determina las medidas del largo y el ancho de la fotografía.

Largo ▶ $(y - 2z)$ cm   Ancho ▶ $(x - 2z)$ cm

2. Determina el área (A) de la fotografía.

$$A = (y - 2z) \cdot (x - 2z)$$

3. Aplica el producto de binomios con un término en común.

$$\begin{aligned} A &= (y - 2z) \cdot (x - 2z) \\ &= (-2z)^2 + (y + x) \cdot (-2z) + y \cdot x \\ &= 4z^2 - 2yz - 2xz + xy \end{aligned}$$

4. Responde.

El área de la fotografía es $(4z^2 - 2yz - 2xz + xy)$ cm².

- Explica una estrategia que se haya utilizado en la resolución de algunos de los ejemplos planteados.
- ¿Crees que el trabajar con tu curso aporta a tu proceso de aprendizaje?, ¿por qué?

BDA U2_ACT_16 a 19

≫ Para finalizar la **Lección 1**…

- Ahora que conoces los productos notables, ¿para qué crees que son útiles?
- ¿Qué más te interesa aprender sobre este contenido?
- ¿Pensabas que la geometría se relaciona con el álgebra? Explica.
- ¿Expusiste tus ideas y opiniones de forma coherente y fundada? ¿Por qué?
- ¿Cómo puede ayudarte plantear los modelos en forma gráfica o un bosquejo de una situación particular?
- ¿Trabajaste con tu curso de manera proactiva y respetuosa? Justifica tu respuesta.

Lección 2

Sistemas de ecuaciones lineales

En la búsqueda de una vida saludable y equilibrada, es fundamental encontrar el punto de equilibrio entre nuestra salud física y nuestro bienestar emocional y mental. Como si se tratara de resolver una ecuación con dos variables, debemos identificar y combinar los distintos factores que contribuyen a nuestro bienestar integral.

Fuente: Organización Panamericana de la Salud (9 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_41

Ecuación lineal con dos incógnitas

Imaginemos una balanza en equilibrio, en la que un plato representa la salud física, simbolizada por el corazón, y el otro plato representa el bienestar emocional y mental, representado por el cerebro. Para mantener esta balanza en armonía (equilibrio), necesitamos asignar valores concretos a cada uno de estos aspectos y encontrar una ecuación que exprese su relación.

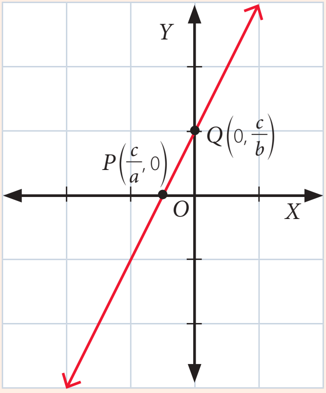
Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_42* para repasar el trabajo con ecuaciones lineales con una incógnita.

- ¿Por qué crees que es importante encontrar el equilibrio entre la salud física y la salud mental?
- ¿Qué ecuación podrías plantear que relacione el bienestar emocional y mental (B_{em}) con la salud física (S_f)?
- ¿Qué procedimiento debes realizar para resolver una ecuación? Explica.
- De lo que ya sabías, ¿qué te sirvió para responder las preguntas?
- ¿Crees que expresar y escuchar ideas de forma respetuosa te ayudará en tu aprendizaje?, ¿por qué?

Ecuación lineal con dos incógnitas

Una **ecuación lineal de dos incógnitas** (x e y) tiene la forma $ax + by = c$, en la que a, b y c son números racionales ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$



Al representarla en el plano cartesiano, la gráfica corta al eje X en el punto $P\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ y al eje Y en el punto $Q\left(0, \frac{c}{b}\right)$. Además $-\frac{a}{b}$ corresponde a la **pendiente de la recta** y $\frac{c}{b}$ es el **coeficiente de posición de la recta**.

Estas ecuaciones tienen **infinitas soluciones**.

Es posible representarlas utilizando una **función afín**.

$$f: A \longrightarrow B, \text{ tal que } f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

A continuación, representarás una **ecuación lineal con dos incógnitas** de manera algebraica y de manera gráfica en variados contextos.

Ejemplo 1

La relación entre la cantidad de calorías c que se queman al ejercitarse en una trotadora eléctrica al correr durante 20 minutos a una rapidez v está dada por la ecuación que se muestra en la imagen. Si se quisiera expresar en la forma $c = mv + n$, ¿cuál sería la ecuación que la representaría?

1. Para determinar la ecuación de la forma solicitada, «despeja» la variable c de la ecuación.

$71v - 71v - 2c = 252 - 71v$ → Resta $71v$ en ambos lados de la ecuación.

$-2c \cdot -\frac{1}{2} = 252 \cdot -\frac{1}{2} - 71v \cdot -\frac{1}{2}$ → Multiplica por $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$c = -126 + \frac{71}{2}v$ → Aplica la propiedad conmutativa.

$c = \frac{71}{2}v + (-126)$

2. Responde.

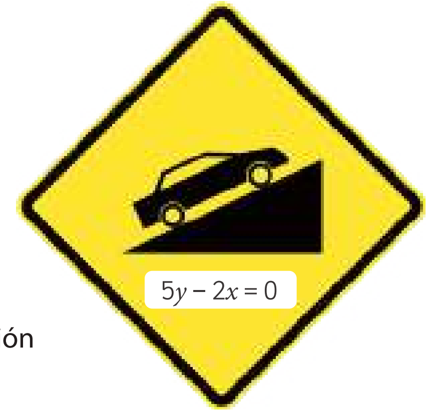
La ecuación es $c = \frac{71}{2}v + (-126)$.

- ¿Qué dificultad tuviste al representar una ecuación lineal con dos incógnitas? ¿La superaste? Explica.

BDA U2_ACT_20

EJEMPLO 2

Un automóvil hace un recorrido por una carretera y se encuentra con la señalización que se muestra en la imagen. Considera que la inclinación de la carretera se mantiene constante en este tramo. La distancia recorrida (en metros) de manera horizontal se representa por x y la distancia recorrida de forma vertical (en metros) por y. La ecuación que representa la distancia recorrida en este tramo de la carretera se muestra en la imagen.



Representa en una tabla algunas soluciones que satisfacen la ecuación y luego ubica los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano.

1. Representa la ecuación de la forma $y = mx + n$.

$$5y - 2x + 2x = 0 + 2x$$ ▶ Suma $2x$ en ambos lados de la ecuación.

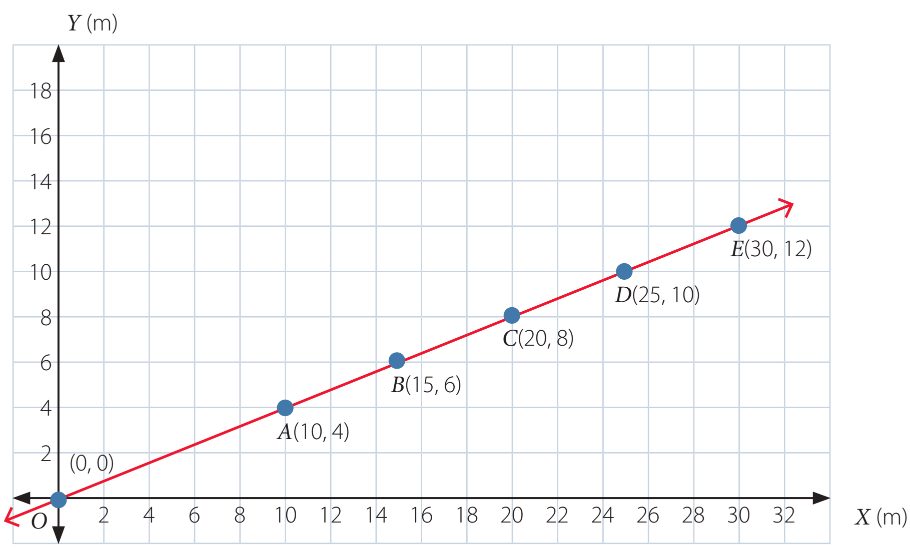
$$5y \cdot \frac{1}{5} = 2x \cdot \frac{1}{5}$$ ▶ Multiplica por $\frac{1}{5}$.

$$y = \frac{2}{5}x$$

2. Representa en una tabla algunas soluciones que satisfacen la ecuación $y = \frac{2}{5}x$.

x	0	10	15	20	25	30
$y = \frac{2}{5}x$	$y = \frac{2}{5} \cdot 0 = 0$	$y = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$	$y = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$	$y = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8$	$y = \frac{2}{5} \cdot 25 = 10$	$y = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12$
(x, y)	$O(0, 0)$	$A(10, 4)$	$B(15, 6)$	$C(20, 8)$	$D(25, 10)$	$E(30, 12)$

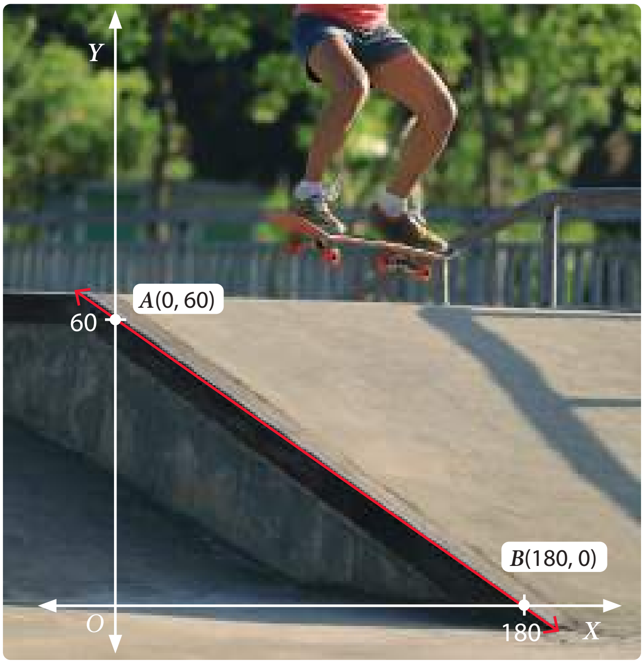
3. Representa los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano.



- Al representar una ecuación lineal de dos incógnitas, ¿qué fortaleza tuviste? ¿Cómo la potenciarías? Explica.

Ejemplo 3

Sofía practica *skate* y utiliza una rampa en forma de plano inclinado, como se muestra en la imagen. ¿Qué ecuación representa la rampa en el plano cartesiano?



1. Representa la ecuación de la forma $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

   La recta corta al eje Y en el punto $A(0, 60)$, es decir, se tiene que:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad \blacktriangleright \quad y = -\frac{a}{b}x + 60$$

   Además, la recta pasa por el punto $B(180, 0)$. Al reemplazar se obtiene lo siguiente:

$$0 = -\frac{a}{b} \cdot 180 + 60 \longrightarrow \text{Resta 60 en ambos lados de la ecuación.}$$

$$0 - 60 = -\frac{a}{b} \cdot 180 + 60 - 60$$

$$-60 = -\frac{a}{b} \cdot 180 \longrightarrow \text{Divide por 180 en ambos lados de la ecuación.}$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{a}{b}$$

2. Interpreta los valores obtenidos.

   La pendiente de la recta es $-\frac{1}{3}$ y su coeficiente de posición es 60.

3. Responde.

   La ecuación es $y = -\frac{1}{3}x + 60$.

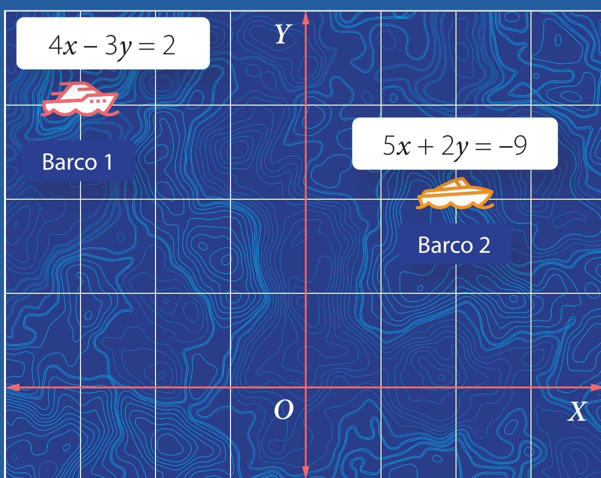
- ¿Qué paso del **Ejemplo 3** consideraste desafiante? Explica.
- Describe con tus palabras lo que entiendes por ecuación lineal con dos incógnitas.

BDA U2_ACT_21 a 24

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un dron sobrevuela la costa y registra dos barcos que se aproximan. El sistema de observación ha establecido que sus trayectorias están determinadas por las ecuaciones que se muestran en la imagen.

Las coordenadas x e y se refieren a la posición relativa respecto a un punto de referencia en el mar. Con el fin de prevenir un accidente, se necesita conocer el punto en común de las trayectorias.



Un dron de vigilancia es un vehículo aéreo no tripulado que puede programarse para realizar rutas específicas en horarios determinados. Estos dispositivos pueden ser controlados de forma remota y están equipados con cámaras de alta resolución que transmiten imágenes nítidas en tiempo real. Su uso abarca desde la seguridad en rutas terrestres y marítimas hasta la protección de hogares, recintos privados e incluso la asistencia para los cuerpos de seguridad.

La principal función de los drones de seguridad y vigilancia es realizar un seguimiento visual utilizando su cámara incorporada. Estos drones pueden seguir a personas, grupos, vehículos y estar atentos ante distintas situaciones para prevenir accidentes o amenazas a la seguridad.

Algunos drones pueden identificar intrusos, prevenir incendios, controlar fronteras e incluso asistir en rescates en zonas extremas, como ocurre en el caso de los drones contra incendios.

Para su correcto funcionamiento, es esencial una integración adecuada entre la tecnología necesaria y el personal capacitado para su manejo.

Fuente: UMILES (10 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_43

- ¿Qué puntos del plano pertenecen a la trayectoria del Barco 1? ¿Y a la trayectoria del Barco 2? Identifica tres puntos en cada caso.
- ¿Cómo determinarías el punto en común de las trayectorias? Comenta con tu curso.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_44* para trabajar la representación de rectas en el plano cartesiano.

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** tiene la forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$$

▶ En la que a, b, c, d, e y f son números racionales y x e y son las incógnitas.

Una **solución** al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al reemplazarlas en las ecuaciones, se satisfacen ambas igualdades. La solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede representar como (x, y).

A continuación, representarás **sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas** en variadas situaciones en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo

Diana sale de una ciudad en su automóvil hacia el norte a una rapidez de 56 km/h. Una hora más tarde, Lucas sale de la misma ciudad y en la misma dirección con una rapidez de 84 km/h.

- **¿Cuál es el sistema de ecuaciones que modela el tiempo transcurrido y la distancia recorrida hasta que Lucas alcanza a Diana?**
- **¿Cómo representarías gráficamente el sistema de ecuaciones?**

- $\geq$: mayor o igual que.
- Para graficar una recta en el plano cartesiano, como mínimo necesitas 2 puntos.

1. Define las incógnitas.

   d: distancia (en km) entre el automóvil y la ciudad. t: tiempo (en horas) de viaje.

2. Define las ecuaciones.

   La distancia d recorrida por Diana en un tiempo t corresponde a $56 \bullet t$. Lo anterior se modela por la ecuación $d = 56t$.

   Lucas recorre esa distancia d en un tiempo $(t - 1)$, ya que sale una hora más tarde. Es decir, esa distancia equivale a $84 \bullet (t - 1)$. La ecuación que lo modela es $d = 84(t - 1)$. Considera $t \geq 1$.

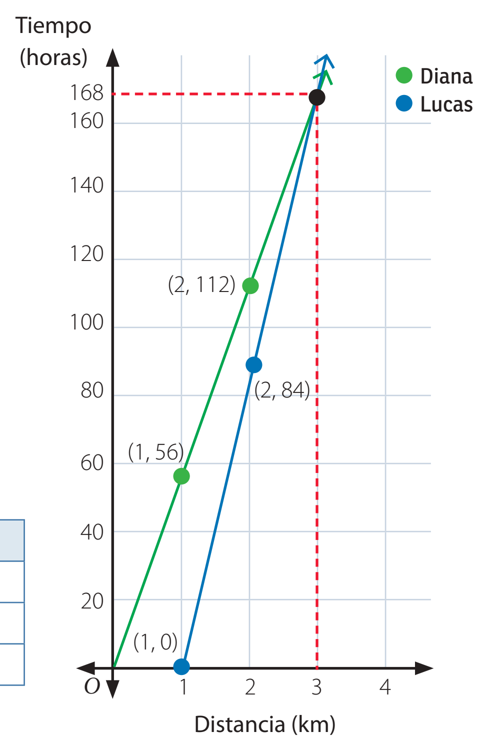
3. Plantea el sistema de ecuaciones.

   $$\begin{array}{l} d = 56t \\ d = 84(t-1) \end{array} \blacktriangleright \begin{array}{l} d - 56t = 0 \\ d = 84t - 84 \end{array} \blacktriangleright \left.\begin{array}{l} d - 56t = 0 \\ d - 84t = -84 \end{array}\right|$$

4. Registra en una tabla algunos valores para luego ubicarlos en el plano cartesiano.

$d = 56t$		
t	d	(t, d)
1	56	(1, 56)
2	112	(2, 112)

$d = 84t - 84$		
t	d	(t, d)
1	0	(1, 0)
2	84	(2, 84)



5. Representa los pares ordenados en el plano cartesiano.

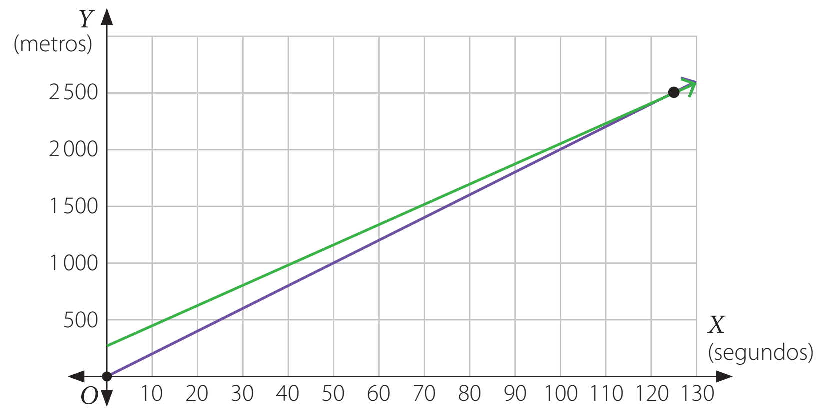
- Observando el gráfico, se puede afirmar que su solución es $t = 3$, $d = 168$. ¿Por qué? Explica.
- ¿El sistema de ecuaciones tiene más soluciones?, ¿cómo lo sabes?

BDA U2_ACT_25 a 28

Resolución de sistemas de ecuaciones: método gráfico

En el ciclismo de pista hay una modalidad que se llama persecución. Esta consiste en ubicar a dos ciclistas en puntos opuestos del velódromo. Resultará vencedor el equipo que alcance al otro o el que registre el mejor tiempo al completar un determinado número de vueltas. El velódromo tiene un recorrido de 250 m por vuelta.

Fuente: La bolsa del corredor (13 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_45



Si se modela el desplazamiento de ambos ciclistas asumiendo que compiten a una rapidez constante, entonces, se puede determinar si un ciclista va a ser alcanzado, o si nunca se van a encontrar, por medio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Ya que ambos ciclistas empiezan en puntos diferentes, se debe poner a uno de ellos como referencia mientras que el otro se ubica 250 m por delante (esta suposición es en el modelo, no en la competencia). De esta forma si un ciclista corre a 18 m/s y empieza 250 m adelante de otro que corre a 20 m/s, las ecuaciones resultantes son las siguientes:

Ciclista 1 ▶ $y = 18x + 250$
Ciclista 2 ▶ $y = 20x$

La incógnita y es la distancia que recorren en metros, mientras que x es el tiempo en segundos. En el gráfico se representan ambas ecuaciones del sistema.

- ¿Cómo crees que se representó gráficamente cada ecuación del sistema?
- Al observar el gráfico, ¿crees que las rectas se intersecan en algún punto?, ¿en cuál?
- Junto con tu curso, interpreta este punto de intersección en el contexto de la situación problema.
- ¿Crees que al intercambiar opiniones con tu curso se facilita tu comprensión de los contenidos? Explica.

Para graficar rectas, puedes utilizar el *software* educativo GeoGebra disponible en: *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_46*

Resolución de sistemas de ecuaciones: método gráfico

Para resolver **gráficamente** un sistema de ecuaciones lineales, se representan en el plano cartesiano las rectas correspondientes a cada ecuación. La solución del sistema, cuando existe y es única, será el punto de intersección de ambas rectas.

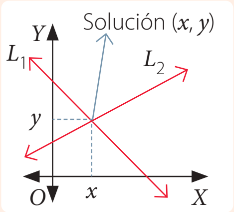
Al graficar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$$

con a, b, c, d, e y f números racionales distintos de cero, se tienen 3 posibles casos:

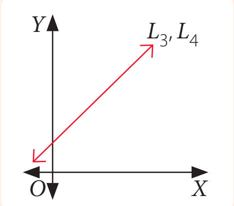
- El sistema es **compatible**, es decir, tiene **una única solución** y es cuando las dos rectas son secantes (L_1 y L_2). Además, se cumple que:

  $\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}$ con $d \neq 0$ y $e \neq 0$.



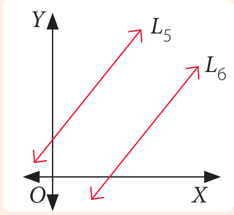
- El sistema es **compatible indeterminado**, es decir, tiene **infinitas soluciones** y es cuando las dos rectas son coincidentes (L_3 y L_4).

  Además, se cumple que: $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$ con $d \neq 0$, $e \neq 0$ y $f \neq 0$.



- El sistema es **incompatible**, es decir, **no tiene solución**, y es cuando las dos rectas son paralelas no coincidentes (L_5 y L_6). Además, se cumple que:

  $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \neq \dfrac{c}{f}$ con $d \neq 0$, $e \neq 0$ y $f \neq 0$.



Ahora, resolverás de manera **gráfica** sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en variadas situaciones en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 1

En la situación de la página anterior, comprueba que el sistema de ecuaciones propuesto es compatible.

1. A partir del sistema de ecuaciones, identifica los valores de a, b, d y e.

$$\left.\begin{array}{l} y = 18x + 250 \\ y = 20x \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 18x - y = -250 \\ 20x - y = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow a = 18,\ b = -1,\ d = 20 \text{ y } e = -1.$$

2. Determina si se cumple $\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}$.

$$\frac{a}{d} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \qquad \frac{b}{e} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Luego, $\dfrac{9}{10} \neq 1$. Por lo tanto, se cumple que $\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}$.

3. Responde.

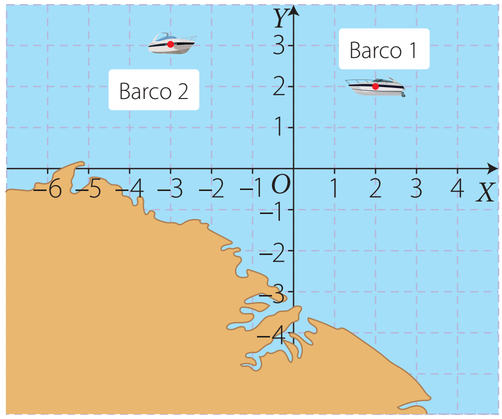
El sistema de ecuaciones es compatible y tiene una única solución.

Para graficar las ecuaciones puedes representarlas de la forma $y = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{Q}$ (distintos de cero) y asignar valores a x e y en una tabla. Luego, ubica estos puntos (x, y) en el plano cartesiano y únelos con una recta.

Ejemplo 2

El sistema de observación de un dron ha establecido que las trayectorias de dos barcos están determinadas por las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Barco 1} \blacktriangleright\ 3x + y = 8 \\ \text{Barco 2} \blacktriangleright\ x + y = 0 \end{array}\right|$$



Las coordenadas x e y se refieren a la posición relativa respecto a un punto de referencia en el mar. Con el fin de prevenir un choque, se necesita conocer el punto en común de las trayectorias. ¿Cuáles son sus coordenadas?

1. Determina si el sistema tiene solución o no. Si tiene, señala si es única o no.

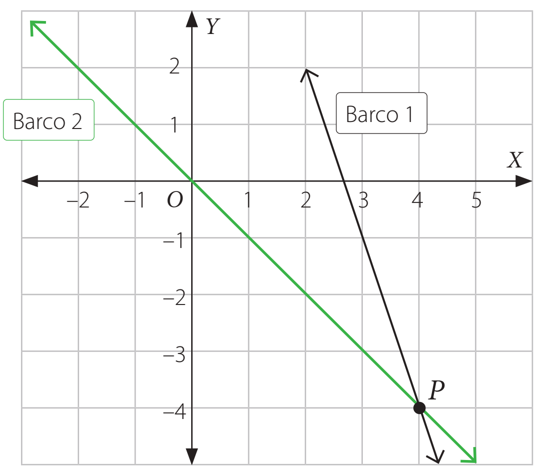
$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 8 \\ x + y = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 3,\ b = 1,\ c = 8,\ d = 1,\ e = 1 \text{ y } f = 0. \\ \dfrac{a}{d} = 3 \text{ y } \dfrac{b}{e} = 1. \text{ Por lo tanto, } \dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}. \end{array}$$

El sistema de ecuaciones es compatible y tiene una única solución.

2. Representa gráficamente cada ecuación del sistema. Las ecuaciones se llevan a la forma $y = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{Q}$ y $m \neq 0$.

$y = -3x + 8$	
x	y
2	2
3	–1
4	–4

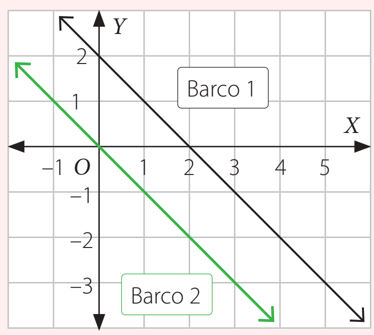
$y = -x$	
x	y
–3	3
0	0
2	–2



Si la trayectoria del barco 1 estuviese determinada por la ecuación $x + y = 2$, representa gráficamente cada ecuación.

$x + y = 2$	
x	y
0	2
5	–3

$x + y = 0$	
x	y
–3	3
0	0



Como las dos rectas son paralelas no coincidentes, el sistema no tiene solución. Por lo tanto, la trayectoria de los barcos no tiene un punto en común.

3. Identifica las coordenadas del punto de intersección P de las rectas en el gráfico: $P(4, -4)$.

4. Responde.

Las coordenadas del punto en común de las trayectorias de ambos barcos son $(4, -4)$.

- ¿Por qué crees que en este método de resolución se debe identificar el punto de intersección de ambas rectas?
- ¿Qué utilidad tiene el método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones?

Ejemplo 3

Se quiere conocer la edad actual de dos personas. El doble de la diferencia de las edades es 10 años, y en 2 años más la edad del menor será igual a la edad que tuvo el mayor hace 3 años.

- Plantea un sistema de ecuaciones que represente esta información.
- ¿Cuál es la clasificación del sistema de ecuaciones?
- ¿Cuál es la gráfica que lo representa?

1. Plantea el sistema de ecuaciones.

x: edad de la persona mayor. y: edad de la persona menor.

El doble de la diferencia de las dos edades es 10 años. ▶ $2(x - y) = 10$

En 2 años más la edad del menor será igual a la edad del mayor hace 3 años. ▶ $y + 2 = x - 3$

El sistema de ecuaciones es: $\left.\begin{array}{r} 2x - 2y = 10 \\ x - y = 5 \end{array}\right|$

2. Clasifica el sistema de ecuaciones.

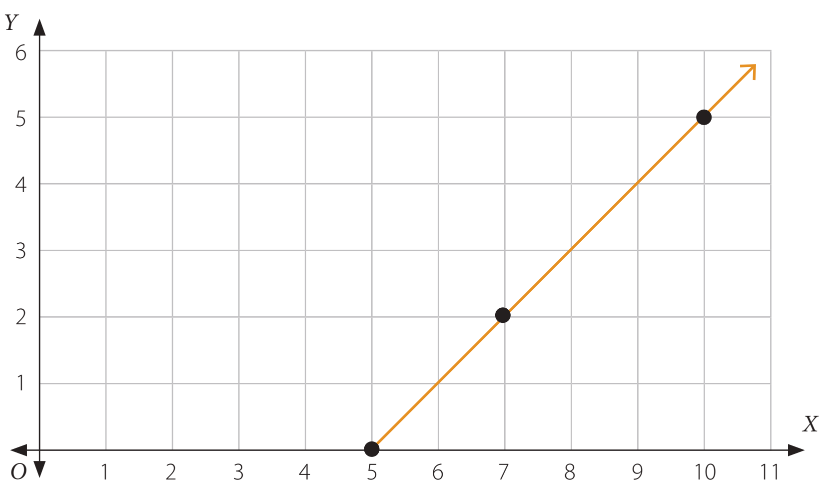
$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2y = 10 \\ x - y = 5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 2, b = -2, c = 10, d = 1, e = -1 \text{ y } f = 5. \\ \dfrac{a}{d} = 2, \dfrac{b}{e} = 2 \text{ y } \dfrac{c}{f} = 2. \text{ Por lo tanto, } \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}. \end{array}$$

El sistema de ecuaciones es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

3. Representa gráficamente cada ecuación del sistema. Las ecuaciones se llevan a la forma $y = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{Q}$ y $m \neq 0$.

$y = x - 5$	
x	y
5	0
7	2
10	5

$y = x - 5$	
x	y
5	0
7	2
10	5



- El sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. ¿Todas son posibles respuestas para conocer las edades actuales de las personas? Comenta con tu curso.

BDA U2_ACT_30 a 33

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de igualación

Dentro de la producción y el consumo responsable de alimentos, se incluyen aspectos claves como fomentar un proceso de producción y consumo eficiente, además de promover prácticas sostenibles desde la producción hasta la distribución y el consumo final.

Por ejemplo, una iniciativa que promueve el consumo de frutas y verduras locales contribuye a mejorar la salud de las personas y a reducir la huella de carbono asociada con la producción y transporte de alimentos.

Fuente: Pacto mundial (13 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_47

Dentro de este contexto, Clara y Felipe viven en una zona rural y están muy comprometidos con llevar a cabo prácticas saludables y que potencien el cuidado del medioambiente. Para apoyar estas causas, compran productos en un mercado local, donde los agricultores de la zona venden sus productos directamente a los consumidores.

En su compra del día llevan 5 ajos por $1 000, 2 berenjenas a $500 cada una y 2 zapallos italianos a $400 cada uno. El monto de su compra lo pagan con 8 monedas en total, algunas de $500 y otras de $100.

Visita el siguiente sitio para conocer más acciones que potencian una producción y consumo responsable: *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_48*

- ¿Cómo calcularías el total de la compra? Justifica.
- ¿Cuáles son las incógnitas en esta situación propuesta?
- ¿Crees que la cantidad de monedas de $500 y de $100 la puedes obtener resolviendo un sistema de ecuaciones? Explica.
- ¿Qué información utilizarías para plantear cada ecuación?
- Si despejas la misma incógnita en ambas ecuaciones, ¿cómo se relacionan las expresiones obtenidas?
- Si no puedes usar el método gráfico, ¿cómo resolverías el sistema de ecuaciones?

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el **método de igualación**, considera lo siguiente:

1.° «Despeja» la misma incógnita en las dos ecuaciones.

2.° Iguala las expresiones obtenidas en el primer paso y «despeja» la incógnita restante.

3.° Determina el valor de la otra incógnita reemplazando en alguna de las ecuaciones «despejadas» el valor de la incógnita calculada anteriormente.

4.° Verifica las soluciones.

Ahora, aplicarás el **método de igualación** en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo 1

En la situación de la página anterior, determina con cuántas monedas de \$500 y de \$100 pagaron su compra Clara y Felipe.

1. Calcula el total de la compra.

   5 ajos, 2 berenjenas y 2 zapallos italianos. ▶ $1\,000 + 2 \cdot 500 + 2 \cdot 400 = 1\,000 + 1\,000 + 800 = 2\,800$

2. Plantea el sistema de ecuaciones.

   x: cantidad de monedas de \$500. y: cantidad de monedas de \$100.

   El total de su compra lo pagan con monedas de \$500 y de \$100. ▶ $500x + 100y = 2\,800$

   Pagan con 8 monedas de \$500 y de \$100. ▶ $x + y = 8$

   El sistema de ecuaciones es: $\begin{array}{r|} 500x + 100y = 2\,800 \\ x + y = 8 \\ \hline \end{array}$

3. «Despeja» la incógnita y en ambas ecuaciones.

   $$\begin{array}{r|l} 500x + 100y = 2\,800 & / -500x \\ y + x = 8 & / -x \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} 100y = 2\,800 - 500x & / : 100 \\ y = 8 - x & \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|} y = 28 - 5x \\ y = 8 - x \\ \hline \end{array}$$

4. Iguala las expresiones obtenidas y «despeja» la incógnita x. Luego, determina el valor de la incógnita y.

   $$\begin{aligned} 28 - 5x &= 8 - x \; / +5x - 8 \\ 20 &= 4x \; / : 4 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

   Reemplaza $x = 5$ en una de las ecuaciones.

   $y = 8 - x = 8 - 5 = 3$

5. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

   $500x + 100y = 2\,800 \Rightarrow 500 \cdot 5 + 100 \cdot 3 = 2\,500 + 300 = 2\,800$ ▶ Se mantiene la igualdad.

   $x + y = 8 \Rightarrow 5 + 3 = 8$ ▶ Se mantiene la igualdad.

6. Responde.

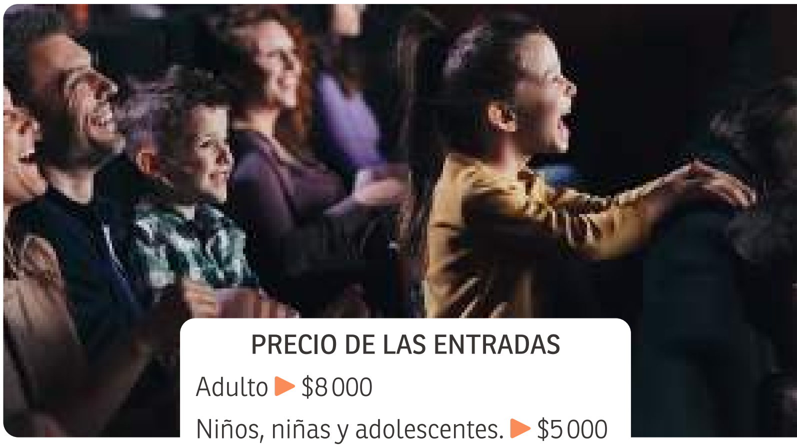
   Clara y Felipe pagaron con 5 monedas de \$500 y 3 monedas de \$100.

- ¿De qué otra forma puedes verificar la solución obtenida en el **Ejemplo 1**?

BDA U2_ACT_34

» EJEMPLO 2

En el entorno teatral, tanto niños como adultos pueden sumergirse en historias cautivadoras, explorar nuevas ideas y perspectivas y disfrutar de momentos de diversión y reflexión en compañía de su familia o amigos. Estas experiencias no solo fortalecen los lazos, sino que también contribuyen al desarrollo personal y al bienestar emocional.



PRECIO DE LAS ENTRADAS

Adulto ▶ $8 000

Niños, niñas y adolescentes. ▶ $5 000

Dentro de este contexto, se hizo una oferta para motivar la asistencia al teatro. El precio de las entradas se muestra en la imagen. Durante un día asistieron 150 personas y se recaudaron $930 000 por concepto de entradas.

Se quiere saber el impacto en la cantidad de personas asistentes. Para ello, se necesita determinar cuántos adultos y cuántos niños, niñas y adolescentes asistieron a la obra de teatro ese día.

1. Plantea el sistema de ecuaciones.

x : cantidad de adultos. y : cantidad de niños, niñas y adolescentes.

Un día asistieron 150 personas, tanto adultos, niños, niñas y adolescentes. ▶ $x + y = 150$

Se recaudaron $930 000 por concepto de entradas. ▶ $8\,000x + 5\,000y = 930\,000$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ 8\,000x + 5\,000y = 930\,000 \end{array}\right|$$

2. «Despeja» la incógnita y en ambas ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ 8\,000x + 5\,000y = 930\,000 \end{array}\right| \begin{array}{l} / -x \\ / -8\,000x \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y = 150 - x \\ 5\,000y = 930\,000 - 8\,000x \end{array}\right| \; / : 5\,000 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 150 - x \\ y = 186 - \frac{8}{5}x \end{array}\right|$$

3. Iguala las expresiones obtenidas y «despeja» la incógnita x.

Luego, determina el valor de la incógnita y.

$$\begin{aligned} 150 - x &= 186 - \frac{8}{5}x \; / \cdot 5 \\ 750 - 5x &= 930 - 8x \; / + 8x - 750 \\ 3x &= 180 \; / : 3 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Reemplaza $x = 60$ en una de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} y &= 150 - x \\ y &= 150 - 60 \\ y &= 90 \end{aligned}$$

4. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

$x + y = 150$

$60 + 90$

$= 150$

▶ Se mantiene la igualdad.

$8\,000x + 5\,000y = 930\,000$

$8\,000 \cdot 60 + 5\,000 \cdot 90$

$= 480\,000 + 450\,000$

$= 930\,000$ ▶ Se mantiene la igualdad.

5. Responde.

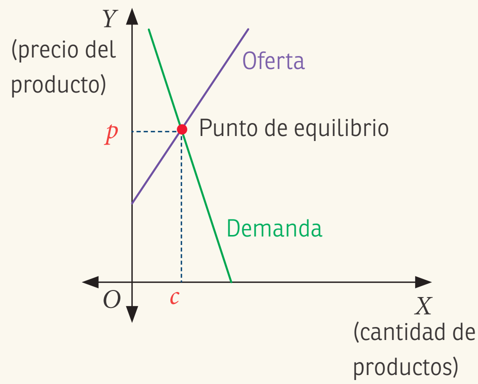
Ese día, asistieron 60 adultos y 90 niños, niñas y adolescentes a la obra de teatro.

Para **resolver una ecuación con coeficientes fraccionarios** puedes calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m.) entre los denominadores y multiplicar cada término de la ecuación por dicho número para dejar los coeficientes enteros y resuelves. Luego, si es el caso, simplificas hasta obtener una fracción irreducible.

Ejemplo 3 » Conecta con **Historia, Geografía y Ciencias Sociales**

Como has visto en la asignatura de **Historia, Geografía y Ciencias Sociales**, en el mercado el punto de equilibrio (c, p) hace referencia al nivel de venta, en el que se encuentran cubiertos los costos fijo y variable, es decir, no se gana dinero, pero tampoco se pierde. Este punto es donde coinciden las rectas de las ecuaciones de oferta y demanda. Para obtener sus coordenadas, se debe resolver el sistema de ecuaciones de oferta y de demanda.

En una fabrica textil, las ecuaciones que rigen la oferta y la demanda para un cierto producto son $5p - 2c = 30$ y $c + 10p = 120$, respectivamente. ¿Cuál es el punto de equilibrio de este producto?



1. Plantea el sistema de ecuaciones.

c: cantidad de productos. p: precio del producto.

El sistema de ecuaciones es: $\left.\begin{array}{r} 5p - 2c = 30 \\ c + 10p = 120 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2c + 5p = 30 \\ c + 10p = 120 \end{array}\right|$

2. «Despeja» la incógnita c en ambas ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} -2c + 5p = 30 \\ c + 10p = 120 \end{array}\right| \begin{array}{l} / -5p \\ / -10p \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2c = 30 - 5p \\ c = 120 - 10p \end{array}\right| \; / : -2 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c = -15 + \frac{5}{2}p \\ c = 120 - 10p \end{array}\right|$$

3. Iguala las expresiones obtenidas y «despeja» la incógnita p. Luego, determina el valor de la incógnita c.

$$\begin{aligned} -15 + \frac{5}{2}p &= 120 - 10p \quad / \cdot 2 \\ -30 + 5p &= 240 - 20p \quad / + 20p \\ -30 + 25p &= 240 \quad / + 30 \\ 25p &= 270 \quad / : 25 \\ p &= \frac{270}{25} \\ p &= 10{,}8 \end{aligned}$$

Reemplaza $p = \frac{270}{25}$ en una de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} c &= -15 + \frac{5}{2}p \\ c &= -15 + \frac{5}{2} \cdot \frac{270}{25} \\ c &= -15 + 27 \\ c &= 12 \end{aligned}$$

4. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

$5p - 2c = 30 \Rightarrow 5 \cdot 10{,}8 - 2 \cdot 12 = 54 - 24 = 30$ ▶ Se mantiene la igualdad.

$c + 10p = 120 \Rightarrow 12 + 10 \cdot 10{,}8 = 12 + 108 = 120$ ▶ Se mantiene la igualdad.

5. Responde.

El punto de equilibrio de este producto es $P\left(12, \frac{270}{25}\right)$ o $P(12; 10{,}8)$. Es decir, a un precio de \$10,8; la cantidad demandada y ofertada del producto coinciden (12 unidades).

- ¿Qué conocimientos previos utilizaste en la resolución del **Ejemplo 3**?
- ¿Cómo superarías las posibles dificultades que tuviste al resolver un sistema de ecuaciones? Explica.
- ¿Probaste nuevas estrategias para resolver los problemas? Comenta con tu curso.
- ¿Qué es lo que ya sabes respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones? Comenta con tu curso.

BDA U2_ACT_35 a 38
U2_VID_2 y 3

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de sustitución

La importancia de mantener nuestras playas limpias y libres de residuos es fundamental para salvaguardar tanto la salud como el bienestar de las comunidades costeras y el ecosistema marino. Las playas limpias no solo ofrecen un entorno más agradable y seguro para que las personas disfruten de actividades recreativas y de ocio, sino que también juegan un papel crucial en la preservación de la salud pública. La acumulación de basura en las playas puede representar un riesgo para la salud humana al contaminar el agua y la arena con bacterias, microorganismos patógenos y sustancias tóxicas.

Además, la presencia de desechos plásticos en las playas puede tener graves consecuencias para la vida marina, ya que los animales pueden ingerirlos o quedar atrapados en ellos, lo que conlleva impactos negativos en sus poblaciones y en todo el ecosistema marino. Por lo tanto, instalar basureros adecuados en las playas y promover una cultura de limpieza y cuidado del entorno costero es esencial para garantizar la salud y el bienestar tanto de las personas como del medioambiente marino.

Fuente: EPA (14 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_49

En una comunidad costera se desarrolla un proyecto para la conservación de las playas y la protección de la vida marina. Como parte de este proyecto, se instalan basureros para la recolección de residuos. Estos basureros, su capacidad y costo se muestran en la imagen.

El objetivo es instalar en total 10 basureros de ambos tipos con un presupuesto disponible de $250 000, el que se debe gastar de manera exacta.

- Junto con tu curso, representa el sistema de ecuaciones que corresponde a la situación planteada.
- ¿Cómo resolverías este sistema de ecuaciones?
- ¿Puedes proponer un nuevo método de resolución?, ¿cuál?
- ¿Crees que abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas facilita tu aprendizaje? Explica.

Para comprobar tu solución y la eficacia de tu método de resolución, puedes usar el sitio WolframAlpha disponible en: *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_50*

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el **método de sustitución**, considera:

1.° «Despeja» una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones dadas.

2.° Reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema y resuelve.

3.° Reemplaza la solución de la ecuación en una de las ecuaciones del sistema y resuelve para la incógnita restante.

4.° Verifica las soluciones.

Ahora, aplicarás el **método de sustitución** en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo 1

En la situación de la página anterior, determina cuántos basureros de cada tipo puede comprar la comunidad con el presupuesto disponible.

1. Plantea el sistema de ecuaciones.

x: cantidad de basureros tipo A. y: cantidad de basureros tipo B.

El objetivo es instalar en total 10 basureros en la playa ▶ $x + y = 10$

El basurero A tiene un costo de \$20 000 y el costo del basurero B es \$70 000.

Hay un presupuesto de \$250 000. ▶ $20\,000x + 70\,000y = 250\,000$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 20\,000x + 70\,000y = 250\,000 \end{array}\right|$$

2. «Despeja» una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 20\,000x + 70\,000y = 250\,000 \end{array}\right| \;/ - x \quad \Leftrightarrow \quad y = 10 - x$$

3. Reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema y resuelve. Luego, determina el valor de la otra incógnita.

$$\begin{aligned} 20\,000x + 70\,000y &= 250\,000 \quad / : 10\,000 \\ 2x + 7y &= 25 \\ 2x + 7 \cdot (10 - x) &= 25 \\ 70 - 5x &= 25 \;/ - 70 \\ -5x &= -45 \;/ : -5 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Reemplaza $x = 9$ en una de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} y &= 10 - x \\ y &= 10 - 9 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

4. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

$x + y = 10 \Rightarrow 9 + 1 = 10$ ▶ Se mantiene la igualdad.

$20\,000x + 70\,000y = 250\,000 \Rightarrow 20\,000 \cdot 9 + 70\,000 \cdot 1 = 180\,000 + 70\,000 = 250\,000$ ▶ Se mantiene la igualdad.

5. Responde.

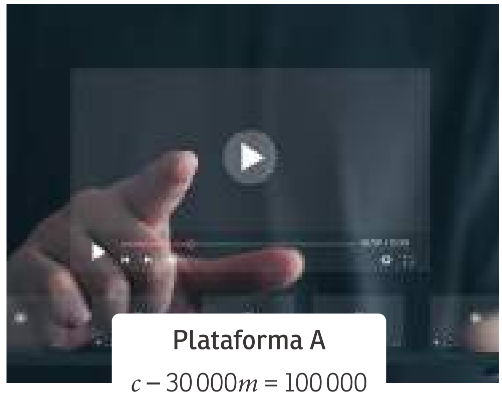
La comunidad puede comprar 9 basureros tipo A y 1 basurero tipo B.

BDA U2_ACT_39

≫ EJEMPLO 2

El costo (c) de dos plataformas de entretenimiento *online* para cierta cantidad de meses (m) se muestra en la imagen.

Josefina y Francisco contratan al mismo tiempo una de las plataformas. Josefina eligió la plataforma A y Francisco la plataforma B. ¿Después de cuántos meses ambos pagarán lo mismo por sus servicios y cuál es ese monto?



1. Plantea el sistema de ecuaciones.

m: cantidad de meses. c: costo de la plataforma.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{l|} c - 30\,000m = 100\,000 \\ c - 50\,000m = 0 \\ \hline \end{array}$$

2. «Despeja» una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

$$\begin{array}{l|} c - 30\,000m = 100\,000 \\ c - 50\,000m = 0 \\ \hline \end{array} \; / + 50\,000m \quad \Leftrightarrow \quad c = 50\,000m$$

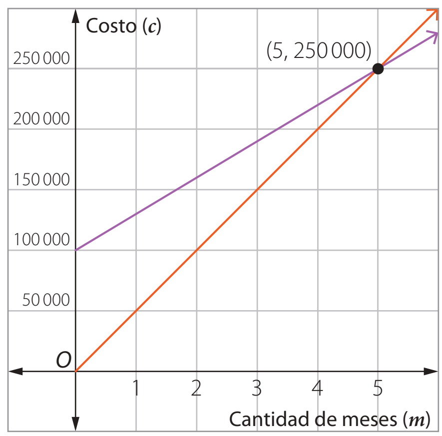
3. Reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema y resuelve.

Luego, determina el valor de la otra incógnita.

$$c - 30\,000m = 100\,000$$
$$50\,000m - 30\,000m = 100\,000$$
$$20\,000m = 100\,000 \; / : 20\,000$$
$$m = 5$$

Reemplaza $m = 5$ en una de las ecuaciones.

$$c = 50\,000m$$
$$c = 50\,000 \cdot 5$$
$$c = 250\,000$$



4. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

$c - 30\,000m = 100\,000$
$250\,000 - 30\,000 \cdot 5$
$= 250\,000 - 150\,000$
$= 100\,000$
▶ Se mantiene la igualdad.

$c - 50\,000m = 0$
$250\,000 - 50\,000 \cdot 5$
$= 250\,000 - 250\,000$
$= 0$
▶ Se mantiene la igualdad.

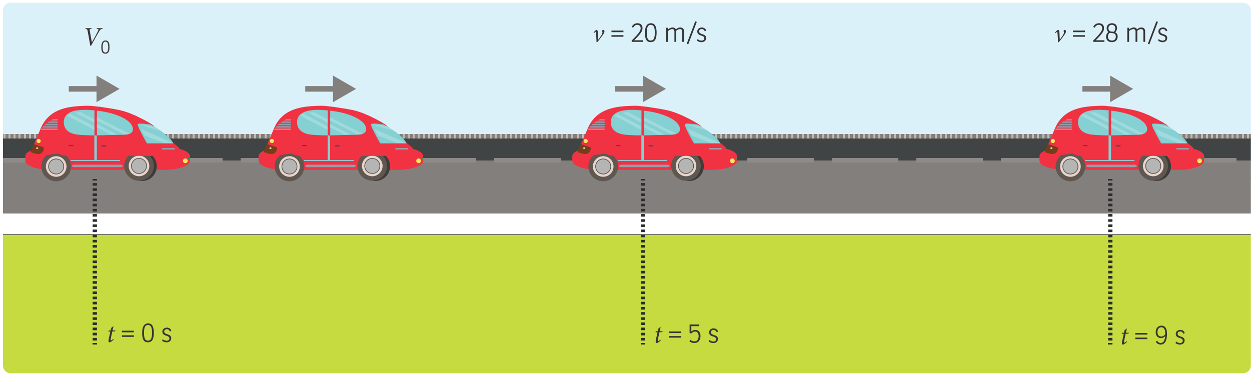
5. Responde.

Después de 5 meses, Josefina y Francisco habrán pagado $250 000 cada uno por el servicio contratado.

- Explica con tus palabras lo que entiendes del método de sustitución al resolver un sistema de ecuaciones.
- A medida que avanzas en este contenido, ¿tu desempeño ha sido constante? Explica.
- Si desarrollaras nuevamente este contenido, ¿qué harías diferente?
- ¿Crees que las preguntas anteriores te ayudan a mejorar tu proceso de aprendizaje?, ¿por qué?

EJEMPLO 3

La rapidez v de un automóvil en función del tiempo t se determina con la expresión $v(t) = v_0 + at$, en la que v_0 es la rapidez inicial y a es la aceleración. Si la rapidez se mide en m/s, el tiempo en s, la aceleración en m/s² y se cumplen las condiciones registradas en el siguiente diagrama:



¿Cuál será la rapidez inicial y la aceleración con la que se desplaza ese automóvil?

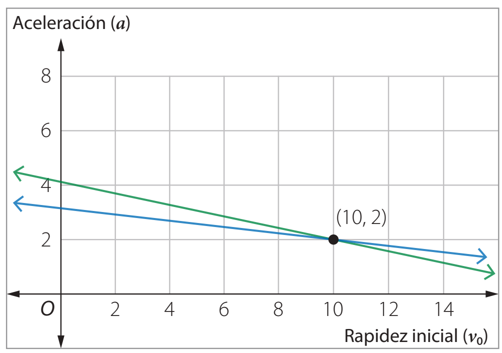
1. Plantea el sistema de ecuaciones.

   Reemplaza en la ecuación los valores registrados en el diagrama:

   $t = 5 \mid v = 20 \;\Rightarrow\; 20 = v_0 + 5a$

   $t = 9 \mid v = 28 \;\Rightarrow\; 28 = v_0 + 9a$

   El sistema de ecuaciones es: $\left.\begin{array}{l} v_0 + 5a = 20 \\ v_0 + 9a = 28 \end{array}\right|$



2. «Despeja» una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

   $\left.\begin{array}{l} v_0 + 5a = 20 \\ v_0 + 9a = 28 \end{array}\right| \; / -5a \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = 20 - 5a$

3. Reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema y resuelve. Luego, determina el valor de la otra incógnita.

   $v_0 + 9a = 28$

   $20 - 5a + 9a = 28$

   $20 + 4a = 28 \; / -20$

   $4a = 8 \; / :4$

   $a = 2$

   Reemplaza $a = 2$ en una de las ecuaciones.

   $v_0 + 5a = 20$

   $v_0 = 20 - 5 \cdot 2$

   $v_0 = 20 - 10$

   $v_0 = 10$

4. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

   $v_0 + 5a = 20$

   $10 + 5 \cdot 2$

   $= 10 + 10$

   $= 20$

   ▶ Se mantiene la igualdad.

   $v_0 + 9a = 28$

   $10 + 9 \cdot 2$

   $= 10 + 18$

   $= 28$

   ▶ Se mantiene la igualdad.

5. Responde.

   La rapidez inicial del automóvil es 10 m/s y su aceleración es 2 m/s².

BDA U2_ACT_40 a 43

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de reducción

Existen formaciones geológicas que tienen características que se pueden estudiar considerando una parte que la represente. En particular, la imagen que se muestra corresponde al geositio Morro de Arica, este es un cerro costero de 280 m de altura aproximada ubicado en el sector sur de la ciudad de Arica.

En el plano cartesiano se representan con rectas partes de la ladera del cerro, que se relacionan con una línea recta. Se presenta la ecuación de la recta en cada caso.

Fuente: Servicio Nacional de Geología y Minería (4 de noviembre de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_92

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), aproximadamente el 16 % de la población experimentará un trastorno mental en algún momento de su vida. En Chile, un informe de la Universidad Católica de Chile y la ACHS indica que el 23,6 % de los habitantes presenta sospechas o problemas relacionados con su salud mental.

La actividad física que se realiza al aire libre fortalece el bienestar mental. Por ejemplo, la montaña ofrece un espacio ideal para encontrar alivio y renovación. Actividades como el senderismo y el alpinismo además de favorecer la condición física, también permiten liberar endorfinas que reducen el estrés y la ansiedad. La mente se relaja en entornos naturales, estimulando la creatividad y mejorando la concentración.

Fuente: El Mostrador (14 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_51

- Junto con tu curso, representa el sistema de ecuaciones que corresponde a la situación planteada.
- Si restas los coeficientes correspondientes de las ecuaciones, ¿qué ocurre con las incógnitas?, ¿puedes obtener el valor de una de ellas?
- ¿La estrategia anterior funcionará en cualquier sistema de ecuaciones?, ¿por qué?

Para comprobar tu solución y la eficacia del método de resolución, puedes usar el sitio WolframAlpha disponible en: *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU2_52*

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de reducción

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el **método de reducción**, considera lo siguiente:

1.° Multiplica una o ambas ecuaciones del sistema por números tales que para una de las incógnitas obtengas coeficientes numéricos que son inversos aditivos o son iguales.

2.° Suma o resta ambas ecuaciones, de manera que quede una ecuación con una incógnita.

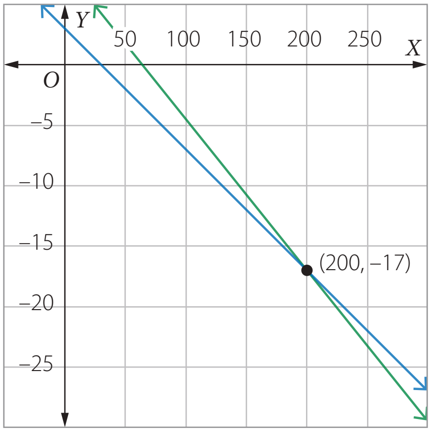
3.° Resuelve la ecuación con una incógnita que resulta del paso anterior.

4.° Reemplaza la solución de la ecuación en una de las ecuaciones del sistema y resuelve la ecuación obtenida para la incógnita restante. Luego verifica las soluciones.

Ahora, aplicarás el **método de reducción** en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo 1

En la situación de la página anterior, determina las coordenadas del punto en el que se intersecan las líneas de la ladera del Morro de Arica.



1. Plantea el sistema de ecuaciones.

   El sistema de ecuaciones es $\left.\begin{array}{r} x + 8y = 64 \\ x + 10y = 30 \end{array}\right|$

2. Resuelve el sistema multiplicando la primera ecuación por –1.

$$\left.\begin{array}{r} x + 8y = 64 \\ x + 10y = 30 \end{array}\right| / \cdot -1 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} -x - 8y = -64 \\ x + 10y = 30 \end{array}\right|$$

3. Suma ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} (-x + x) + (-8y + 10y) &= -64 + 30 \\ 0 + 2y &= -34 \\ 2y &= -34 \; / : 2 \\ y &= -17 \end{aligned}$$

4. Reemplaza $y = -17$ en una de las ecuaciones para determinar el valor de x.

$$\begin{aligned} x + 8y &= 64 \\ x + 8 \cdot (-17) &= 64 \\ x + (-136) &= 64 \; / + 136 \\ x &= 200 \end{aligned}$$

5. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

$x + 8y = 64$	$x + 10y = 30$
$200 + 8 \cdot (-17)$	$200 + 10 \cdot (-17)$
$= 200 + (-136)$	$= 200 + (-170)$
$= 64$	$= 30$
▶ Se mantiene la igualdad.	▶ Se mantiene la igualdad.

6. Responde.

   Las líneas de la ladera del Morro de Arica se intersecan en el punto $P(200, -17)$.

BDA U2_ACT_44

EJEMPLO 2

Para producir un tipo de leche, se mezclan los dos tipos de leche que se muestran en la imagen. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche se necesitan para producir 200 L de leche con 40 % de grasa?

1. Plantea el sistema de ecuaciones.

   x: cantidad de litros de leche con 70 % de grasa.

   y: cantidad de litros de leche con 20 % de grasa.

   Se producirán 200 L de leche. ▶ $x + y = 200$

   Una leche tiene 70 % de grasa y la otra tiene 20 % de grasa.
   La leche producida debe tener 40 % de grasa. ▶ $0{,}7x + 0{,}2y = 0{,}4 \cdot 200$

   El sistema de ecuaciones es:
   $$\left.\begin{aligned} x + y &= 200 \\ 0{,}7x + 0{,}2y &= 80 \end{aligned}\right|$$

2. Resuelve el sistema multiplicando la primera ecuación por 7 y la segunda ecuación por –10.
   $$\left.\begin{aligned} x + y &= 200 \\ 0{,}7x + 0{,}2y &= 80 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &/ \cdot 7 \\ &/ \cdot -10 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} 7x + 7y &= 1\,400 \\ -7x + -2y &= -800 \end{aligned}\right|$$

3. Suma ambas ecuaciones.
   $$(7x + -7x) + (7y + -2y) = 1\,400 + -800$$
   $$0 + 5y = 600$$
   $$5y = 600 \; / : 5$$
   $$y = 120$$

4. Reemplaza $y = 120$ en una de las ecuaciones para determinar el valor de x.
   $$x + y = 200$$
   $$x + 120 = 200 \; / - 120$$
   $$x = 80$$

5. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

$x + y = 200$	$0{,}7x + 0{,}2y = 80$
$80 + 120$	$0{,}7 \cdot 80 + 0{,}2 \cdot 120$
$= 200$	$= 56 + 24$
	$= 80$
▶ Se mantiene la igualdad.	▶ Se mantiene la igualdad.

6. Responde.

   Se necesitan 80 L de leche con 70 % de grasa y 120 L de leche con 20 % de grasa.

Gabriel Cramer
(1704 - 1752)

El matemático Gabriel Cramer propuso un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes (Δ).

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right| \text{ con } a, b, c, d, e \text{ y } f \in \mathbb{Q}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

La solución del sistema se obtiene calculando:
$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Para obtener el valor de las incógnitas x e y, es necesario que $\Delta \neq 0$.

- Explica con tus palabras cómo aplicas el método de reducción al resolver un sistema de ecuaciones.
- ¿Qué es lo que ya sabes respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones?

» Ejemplo 3

Un aeroplano vuela durante 4 horas y recorre 1 280 km manteniendo su ruta en la misma dirección del viento. En otra ocasión vuela la misma cantidad de kilómetros, pero con el viento en dirección contraria, por lo que completa su recorrido en 5 horas. Se asume que el viento en ambos casos tenía la misma velocidad.

Caso 1
Viento a favor
Velocidad del aeroplano (v_a)
Velocidad del viento (v_v)
Velocidad efectiva ($v_a + v_v$)

Caso 2
Viento en contra
Velocidad del aeroplano (v_a)
Velocidad del viento (v_v)
Velocidad efectiva ($v_a - v_v$)

¿Cuál sería la velocidad media (v_a) del aeroplano sin viento y cuál es el cambio de velocidad que genera el viento (v_v) en el aeroplano?

1. Plantea el sistema de ecuaciones.

   La velocidad efectiva se obtiene de la suma (o diferencia) entre la velocidad del aeroplano (v_a) y el cambio de velocidad producido por el viento (v_v). Se plantean las siguientes ecuaciones aplicando la definición de velocidad media.

$$v_a + v_v = \frac{1\,280}{4} = 320 \text{ km/h} \qquad v_a - v_v = \frac{1\,280}{5} = 256 \text{ km/h}$$

   El sistema de ecuaciones es: $\left. \begin{array}{l} v_a + v_v = 320 \\ v_a - v_v = 256 \end{array} \right|$

2. Suma ambas ecuaciones. Reemplaza la solución obtenida en una de las ecuaciones para determinar el valor de la otra incógnita.

$$\begin{aligned} (v_a + v_a) + (v_v + - v_v) &= 320 + 256 \\ 2v_a + 0 &= 576 \\ 2v_a &= 576 \;/ : 2 \\ v_a &= 288 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_a + v_v &= 320 \\ 288 + v_v &= 320 \;/ - 288 \\ v_v &= 32 \end{aligned}$$

3. Verifica las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales.

   $v_a + v_v = 320$
   $288 + 32 = 320$
   ▶ Se mantiene la igualdad.

   $v_a - v_v = 256$
   $288 - 32 = 256$
   ▶ Se mantiene la igualdad.

4. Responde.

   La velocidad media del aeroplano es 288 km/h y el cambio de velocidad que genera el viento es 32 km/h.

» Para finalizar la **Lección 2...**

- Ahora que conoces los sistemas de ecuaciones lineales ¿para qué crees que son útiles?
- ¿Qué más te interesa aprender sobre este contenido?
- ¿Cómo demostraste interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas?

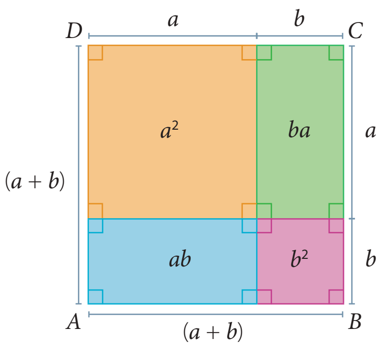
BDA U2_ACT_45 a 48

Síntesis de Unidad 2 · Álgebra y funciones

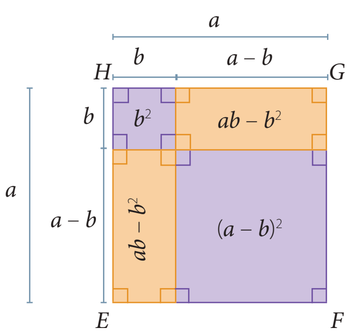
Lección 1 » Productos notables

» Aprendiste...

Cuadrado de un binomio

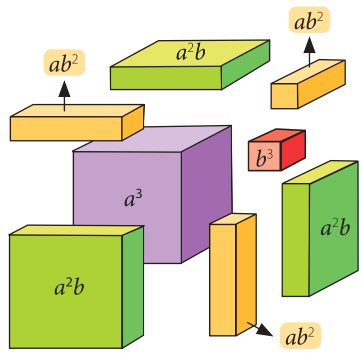


$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

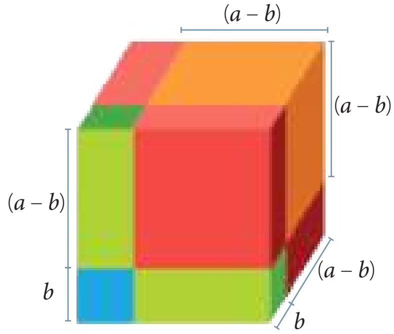


$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Cubo de binomio

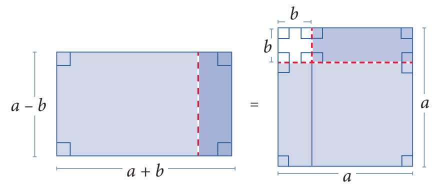


$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



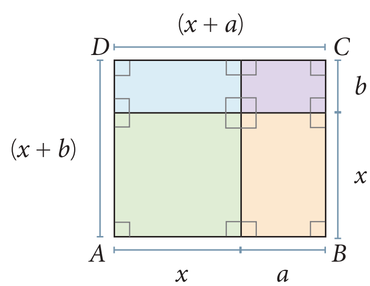
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Suma por su diferencia



$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Producto de binomios con término común



$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

¿Abordaste de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a los problemas?

» Lograste...

- Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica.

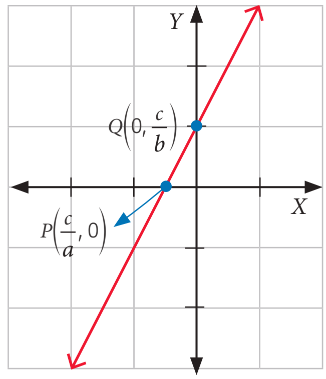
¿Expusiste tus ideas y opiniones de manera coherente y fundamentada?, ¿usaste variadas formas de expresión?, ¿cuáles?

» Aplicaste...

- La resolución de problemas descomponiéndolos en subproblemas más sencillos.
- El uso del lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.
- Demostraciones simples de resultados identificando si hay saltos o errores.
- La representación y ejemplificación utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.

Lección 2 » Sistemas de ecuaciones lineales

» Aprendiste...



Ecuación lineal de dos incógnitas

Una **ecuación lineal de dos incógnitas** (x e y) tiene la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son números racionales ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Estas ecuaciones se pueden representar como: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** tiene la forma:

$$\begin{array}{|l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$$

En la que a, b, c, d, e y f son números racionales y x e y son las incógnitas.

Una **solución** al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al reemplazarlas en las ecuaciones se satisfacen ambas igualdades.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Gráfico
Representa en el plano cartesiano las rectas correspondientes a cada ecuación. La solución del sistema, cuando existe y es única, será el punto de intersección de ambas rectas.

Igualación
1.° Despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2.° Iguala las expresiones obtenidas y despeja la otra incógnita.
3.° Reemplaza este valor en una de las ecuaciones para hallar el valor de la incógnita restante.
4.° Verifica las soluciones obtenidas.

Sustitución
1.° En una de las ecuaciones despeja una de las incógnitas.
2.° Reemplaza esta expresión en la otra ecuación y resuelve.
3.° Reemplaza el valor obtenido en una de las ecuaciones para hallar el valor de la incógnita restante.
4.° Verifica las soluciones obtenidas.

Reducción
1.° Multiplica una o ambas ecuaciones del sistema por números para que una de las incógnitas tenga coeficientes numéricos que son inversos aditivos o son iguales.
2.° Suma o resta ambas ecuaciones y resuelve.
3.° Reemplaza el valor obtenido en una de las ecuaciones para hallar el valor de la incógnita restante.
4.° Verifica las soluciones obtenidas.

¿Trabajaste en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos?

» Lograste...

- Resolver sistemas de ecuaciones lineales relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

¿Resolviste problemas de manera reflexiva, utilizando modelos y rutinas y aplicando de manera creativa los conceptos trabajados? Explica.

» Aplicaste...

- La resolución de problemas utilizando herramientas computacionales.
- La descripción de relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.
- El uso de modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar fenómenos de la ciencia y la realidad.
- La selección de modelos e identificaste cuándo dos variables dependen linealmente.

BDA U2_ACT_49 y 50

Unidad 3
Geometría

La Torre del Reloj de la Plaza Prat de Iquique fue declarada Monumento Histórico por su calidad arquitectónica, reflejo de la época de mayor esplendor de la ciudad. La torre corresponde a una estructura de pino oregón en tres niveles escalonados que alcanzan los 25 m de altura, cada uno de los cuales presenta en sus cuatro caras arcos ojivales y pórticos. El estilo empleado combina elementos góticos e islámicos característicos del arte mudéjar.

Fuente: Consejo de Monumentos Nacionales de Chile (23 de abril de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_53*

En esta unidad estudiarás el concepto de homotecia y utilizarás las propiedades de la semejanza de figuras en la resolución de diversos problemas relacionados con la temática de ciudades y comunidades sostenibles.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_54*, allí encontrarás más monumentos nacionales y el material necesario para armarlos en papel. Así podrás observar las formas de sus diseños y establecer relaciones entre ellas.

En tu entorno puedes reconocer diferentes construcciones que forman parte de tu vida diaria. Si observas con detención podrás identificar diversos elementos geométricos. Por ejemplo, el punto de fuga es el lugar geométrico en el cual las rectas que son paralelas en el plano se encuentran o convergen de acuerdo con la perspectiva.

1. ¿Cuál es el punto de fuga en la imagen?
2. ¿Qué observas en la forma del diseño de la Torre del Reloj de la Plaza Prat?
3. ¿Puedes encontrar en la imagen figuras que se repitan en forma y tamaño?, ¿cuáles?
4. ¿Puedes identificar figuras en la imagen que tengan formas similares pero tamaños diferentes?, ¿cuáles?
5. ¿Hay alguna parte de la imagen que parezca una versión ampliada o reducida de otra?, ¿cuál?

Habilidades del **siglo XXI**

- Observa el patio de tu colegio. Identifica diferentes puntos de fuga en él. ¿Cuántos viste?
- Elige un punto de fuga. Según la perspectiva con la que observaste, dibuja los elementos del entorno que convergen o se encuentran en este punto de fuga.
- Describe a tu curso el punto de fuga seleccionado y justifica por qué lo es.

Conocimientos previos

- Estos contenidos te ayudarán a abordar el trabajo de esta unidad.

Razones

Una **razón** es una comparación entre 2 o más cantidades por medio de la división. La razón entre a y b, con $b \neq 0$, se escribe de la siguiente manera:

$a : b$ o $\frac{a}{b}$ y se lee «a es a b».

Al término a de una razón se le llama **antecedente** y al término b, **consecuente**.

Proporciones

Una **proporción** es una **igualdad** entre dos o más **razones**. La proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $b, d \neq 0$, se escribe de la siguiente manera:

$a : b = c : d$ o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee «a es a b como c es a d».

A los términos a y d de una proporción se les llama **extremos** y a los términos b y c, **medios**.

La **propiedad fundamental de las proporciones** establece que «en toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos», es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces, $a \cdot d = b \cdot c$.

- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? Explica cómo podrías resolverlas.

BDA U3_ACT_1 U3_VID_1

Lección 1

Homotecia

Concepto de homotecia y propiedades

El Parque Nacional Torres del Paine está ubicado en la Región de Magallanes y de la Antártica Chilena. Se ha convertido en un destino turístico por la gran variedad de paisajes, fauna y flora que en él se encuentran.

Generalmente, en los parques hay puentes que desde uno de sus extremos se ven como el puente sobre el lago Pehoe que se muestra en la imagen. En ellos es posible visualizar que los pilares que dan forma al puente van disminuyendo su altura, pero manteniendo la proporción.

Fuente: Parque Torres del Paine (24 de abril de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_55*

Isla del lago Pehoe.

Imagina que estás de pie en el punto O que se muestra en la imagen y observas los rectángulos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ que se representan en ella.

- ¿A qué corresponde la distancia OC? ¿Y la distancia OD? Explica.
- Supón que $\overline{OD'}$ y $\overline{OC'}$ tienen la misma medida. Determina los cocientes $\frac{OD}{OD'}$ y $\frac{OC}{OC'}$. ¿Qué relación hay entre los cocientes anteriores? Explica.

El segmento AB se puede representar simbólicamente como $\overline{AB}$.

- Reflexiona junto con tu curso sobre la pregunta anterior y concluyan cómo se relacionan las medidas de los segmentos OA, OA', OB y OB'.
- ¿Crees que este tipo de construcción tiene un diseño sostenible?, ¿por qué?

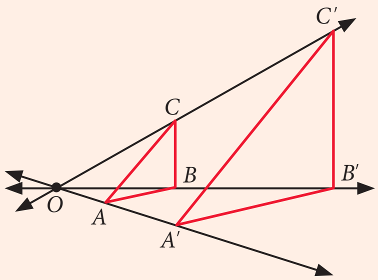
Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_56* para conocer los parques o reservas de tu región.

Homotecia

Una **homotecia** es una transformación geométrica que permite obtener una figura con igual forma a otra.

Dos figuras son **homotéticas** si al unir mediante rectas sus vértices correspondientes, estas rectas concurren en un único punto llamado **centro de homotecia (O)**.

En una homotecia, la **razón** entre la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura imagen y la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura original se llama **razón de homotecia** (k). Geométricamente, lo puedes representar como:



$$k = \frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = \frac{C'O}{CO}$$

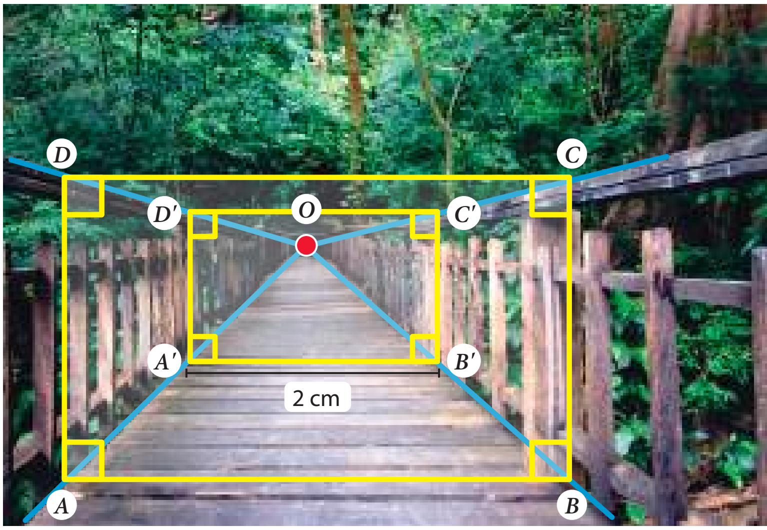
Además, se cumple que la razón de longitud de dos segmentos homotéticos es igual a la razón de homotecia (k).

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

A continuación, reconocerás la aplicación de **homotecias** en tu entorno para determinar diversas medidas.

Ejemplo 1

Observa el puente que se muestra en la imagen y los rectángulos que se dibujaron sobre él. O es el centro de homotecia, la medida del segmento AO es 9 cm y la del segmento $A'O$ es 6 cm. ¿Cuál es la medida del segmento AB?



1. Determina la razón entre los segmentos correspondientes.

$$\frac{A'O}{AO} = \frac{6}{9} \qquad \frac{B'O}{BO} = \frac{6}{9}$$

2. Determina la medida del segmento AB.

En los triángulos $OA'B'$ y OAB la medida de sus lados correspondientes están en proporción, entonces,

$\frac{A'O}{AO} = \frac{A'B'}{AB}$ ▶ $\frac{6}{9} = \frac{2}{AB}$ ▶ $6 \cdot AB = 9 \cdot 2$ Propiedad fundamental de las proporciones

$$AB = \frac{9 \cdot 2}{6}$$

$$AB = 3 \text{ cm}$$

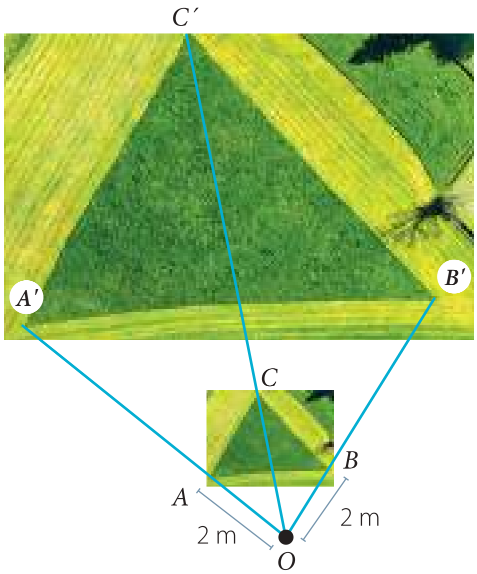
3. Responde.

La medida del segmento AB es 3 cm.

- ¿Has visto otras situaciones que relacionen con homotecias en tu día a día?, ¿cuáles? Comenta con tu curso.
- ¿Qué sucedería si la razón de homotecia (k) es 1?

BDA U3_ACT_2

EJEMPLO 2



Se tiene un terreno agrícola como el triángulo ABC que se muestra en la imagen. Se quiere cultivar otro terreno con la misma forma y el triple de su tamaño, como el triángulo $A'B'C'$ de la imagen. Para obtener el triángulo $A'B'C'$, se aplicó una homotecia con centro en O al triángulo ABC. Si $C'O$ mide 12 m, ¿a qué distancia se encuentran sus vértices correspondientes?

1. Identifica la razón de homotecia.

   Las dimensiones del triángulo $A'B'C'$ son el triple de las dimensiones del triángulo ABC. Por lo tanto, la razón de homotecia es $k = 3$.

2. Plantea las proporciones que se cumplen entre ambas figuras homotéticas.

$$\frac{A'O}{AO} = 3 \;\blacktriangleright\; \frac{A'O}{2} = 3 \qquad \frac{B'O}{BO} = 3 \;\blacktriangleright\; \frac{B'O}{2} = 3 \qquad \frac{C'O}{CO} = 3 \;\blacktriangleright\; \frac{12}{CO} = 3$$

3. Aplica la propiedad fundamental de las proporciones.

$$A'O = 3 \cdot 2 \text{ m} = 6 \text{ m} \qquad B'O = 3 \cdot 2 \text{ m} = 6 \text{ m} \qquad CO \cdot 3 = 12 \cdot 1$$
$$CO = 4 \text{ m}$$

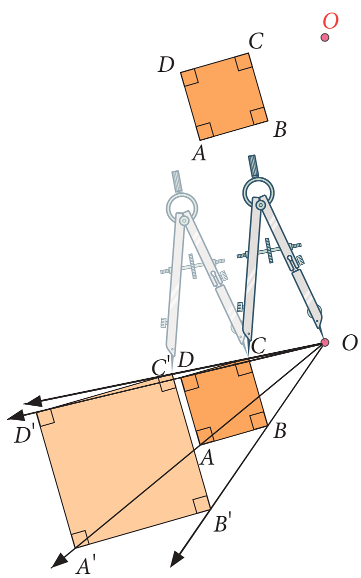
4. Calcula la distancia entre los vértices correspondientes.

$$\begin{aligned} A'A + AO &= A'O \\ A'A + 2 &= 6 \\ A'A &= 4 \text{ m} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B'B + BO &= B'O \\ B'B + 2 &= 6 \\ B'B &= 4 \text{ m} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C'C + CO &= C'O \\ C'C + 4 &= 12 \\ C'C &= 8 \text{ m} \end{aligned}$$

5. Responde.

   Los vértices A' y A están a 4 m, los vértices B' y B a 4 m y los vértices C' y C a 8 m.

EJEMPLO 3



Utiliza regla y compás, para realizar una homotecia de razón $k = 2$ y centro en O sobre el cuadrado $ABCD$ de la imagen.

1. Con la regla, dibuja rectas que partan desde el punto O y pasen por cada uno de los vértices del cuadrado $ABCD$.
2. Ubica el compás con centro en O y radio $\overline{OC}$. Copia esta distancia sobre la misma recta, pero ahora con centro en C. Así obtendrás el punto imagen C'. Repite el proceso con todos los vértices para obtener las imágenes A', B' y D'.
3. Une los puntos A', B', C' y D' para obtener el cuadrado imagen $A'B'C'D'$.

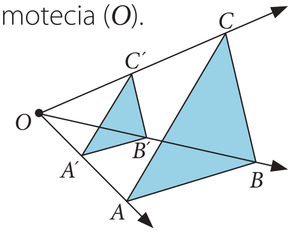
- ¿Qué sucedería con la figura imagen del **EJEMPLO 2** si la razón de homotecia fuera $k = 0{,}5$? Comenta con tu curso.

Clasificación de las homotecias

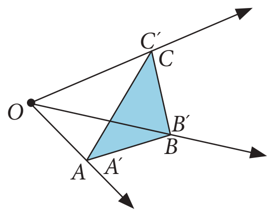
Dependiendo del valor de la razón ($k \neq 0$), se tiene lo siguiente:

- Si $k > 0$, es una **homotecia directa** y se tienen los siguientes casos:

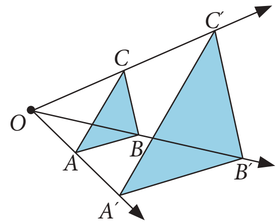
Si $0 < k < 1$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).



Si $k = 1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original.

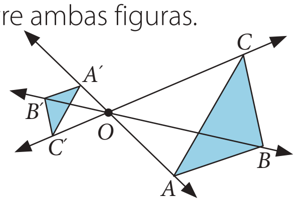


Si $k > 1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).

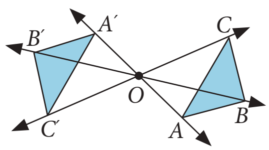


- Si $k < 0$, es una **homotecia inversa** y se tienen los siguientes casos:

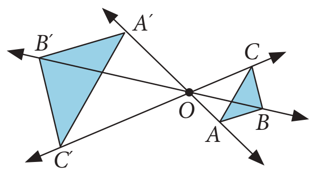
Si $-1 < k < 0$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



Si $k = -1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



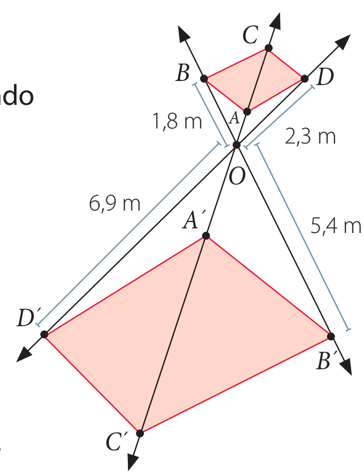
Si $k < -1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



A continuación, seguirás trabajando con **homotecias** en variados contextos, calculando su razón y clasificándolas de acuerdo a este valor.

EJEMPLO 4

Constanza está diseñando una escultura y utiliza en su construcción una homotecia con centro en O. En la imagen se muestra su trabajo. Al cuadrilátero $ADCB$ le realizó una homotecia con centro en O, resultando el cuadrilátero $A'D'C'B'$. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?



1. Calcula la razón de homotecia (k).

   $k = \dfrac{B'O}{BO}$ ▶ $k = 5{,}4 : 1{,}8 = 3$ $\quad$ $k = \dfrac{D'O}{DO}$ ▶ $k = 6{,}9 : 2{,}3 = 3$

2. El centro de la homotecia O está entre ambas figuras, por lo tanto, la homotecia es inversa y el valor de la razón es negativo.

3. Responde.

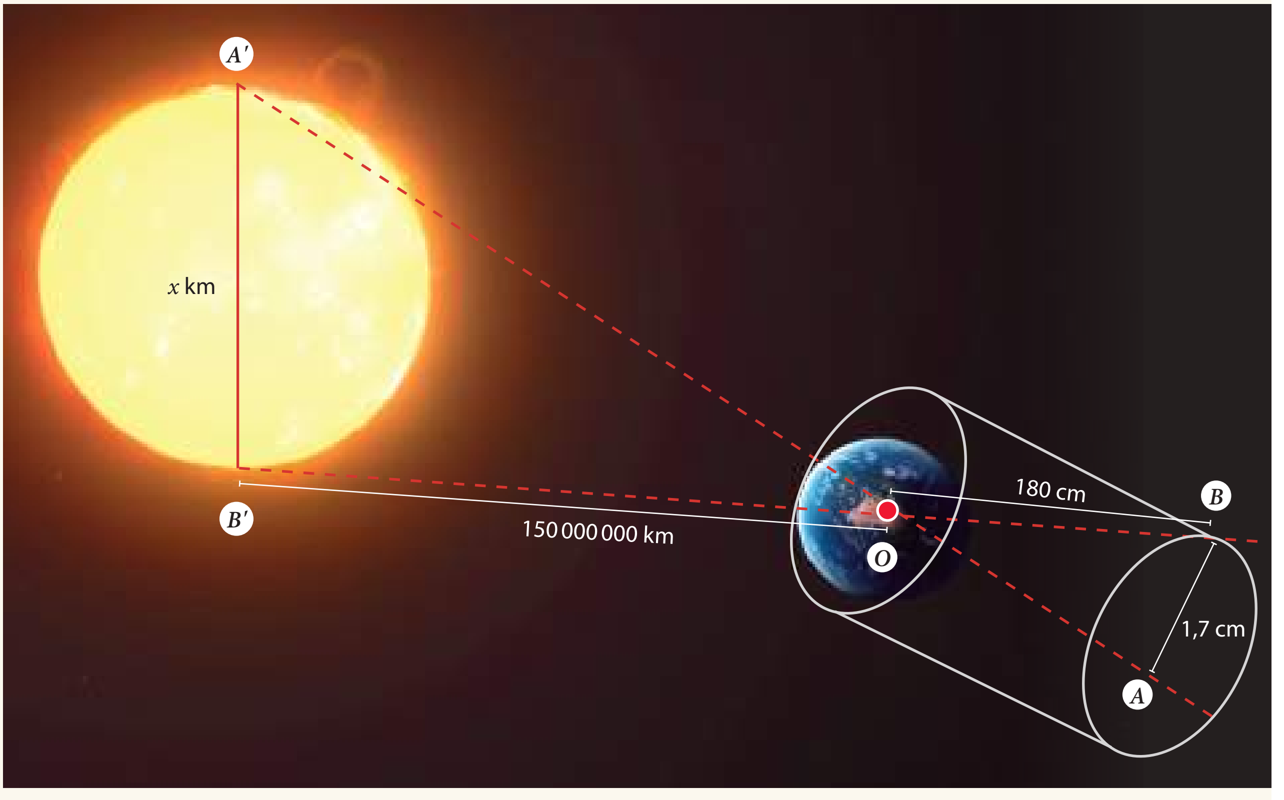
   El valor de la razón de homotecia es -3 , es decir, el cuadrilátero $ADCB$ se amplió 3 veces para obtener el cuadrilátero $A'D'C'B'$.

BDA U3_ACT_3

Ejemplo 5 » Conecta con **Física**

En la asignatura de **Física** has comparado los distintos planetas en cuanto a su distancia al Sol. Para medir el diámetro solar, se puede confeccionar un instrumento con un tubo, como el que se muestra en la imagen. La distancia promedio de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros. Aplica una homotecia para determinar el diámetro aproximado del Sol.

Fuente: NASA (20 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_57*



1. Expresa las distancias en la misma unidad de medida.

   180 cm : 100 000 ▶ $0{,}0018$ km $= 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ km 1,7 cm : 100 000 ▶ $0{,}000017$ km $= 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ km

2. Determina la razón de la homotecia (k) inversa representada en la imagen.

$$k = \frac{B'O}{BO} = \frac{150\,000\,000}{1{,}8 \cdot 10^{-3}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{8}}{1{,}8 \cdot 10^{-3}} = 8{,}\overline{3} \cdot 10^{10}$$

El centro de la homotecia O está entre ambos triángulos, por lo tanto, la homotecia es inversa y el valor de la razón es negativo.

3. Plantea la proporción que se cumple entre los triángulos homotéticos ABO y $A'B'O$.

$$\frac{A'B'}{AB} = 8{,}\overline{3} \cdot 10^{10} \quad ▶ \quad \frac{x}{1{,}7 \cdot 10^{-5}} = 8{,}\overline{3} \cdot 10^{10}$$

$$x = 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}\overline{3} \cdot 10^{10}$$

$$x = 1\,416\,666{,}\overline{6} \text{ km}$$

$$x \approx 1\,416\,667 \text{ km}$$

El símbolo ≈ se utiliza cuando aproximas una cantidad.

4. Responde.

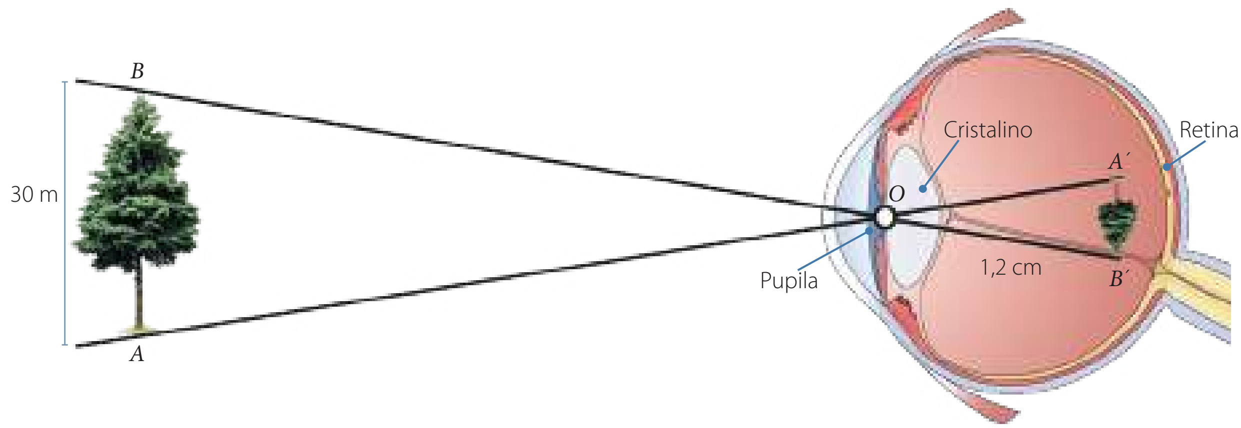
   El diámetro del Sol mide 1 416 667 km, aproximadamente.

Ejemplo 6 » Conecta con **Física**

En la asignatura de **Física** has estudiado el funcionamiento del ojo humano. Este se comporta como un sistema óptico de alta especialización. El proceso de la visión comienza cuando el ojo proyecta el objeto que deseamos ver sobre la retina. Esta proyección corresponde a una homotecia inversa con centro en el cristalino del ojo porque este ve la imagen y la proyecta de manera inversa hacia dentro, para que luego el nervio óptico que está conectado con el cerebro vuelva a invertir la imagen y así llegue de manera correcta al cerebro.

Fuente: FÍSICALAB (25 de abril 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_58

Si se observa un pino, como el que se muestra en la imagen, de modo que la distancia entre la parte superior de este y la pupila del ojo sea 25 m, ¿cuál será la altura de la imagen que se proyecta en la retina?



1. Expresa las distancias en la misma unidad de medida.

   30 m • 100 ▶ 3 000 cm   25 m • 100 ▶ 2 500 cm

2. Determina la razón de la homotecia (k) inversa representada en la imagen.

   $k = \dfrac{B'O}{BO}$ ▶ $k = 1{,}2 : 2\,500 = 0{,}00048$

   Al ser una homotecia inversa, la razón es –0,00048.

3. Plantea la proporción que se cumple entre los triángulos homotéticos AOB y $A'OB'$.

   $\dfrac{A'B'}{AB} = 0{,}00048$ ▶ $\dfrac{A'B'}{3\,000} = 0{,}00048$ ▶ $A'B' = 0{,}00048 \cdot 3\,000$

   $A'B' = 1{,}44$ cm

4. Responde.

   La altura del pino proyectado en la retina es 1,44 cm.

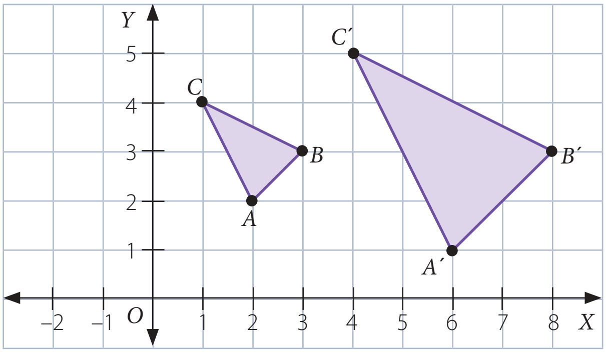
- ¿Cómo explicarías con tus palabras el tipo de homotecia que se desarrolla en el proceso de visión?
- ¿Cómo el uso de representaciones facilita tu comprensión sobre la aplicación de homotecias? Explica.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_59* y observa cómo el lente cristalino de tu ojo lleva las imágenes a tu cerebro.

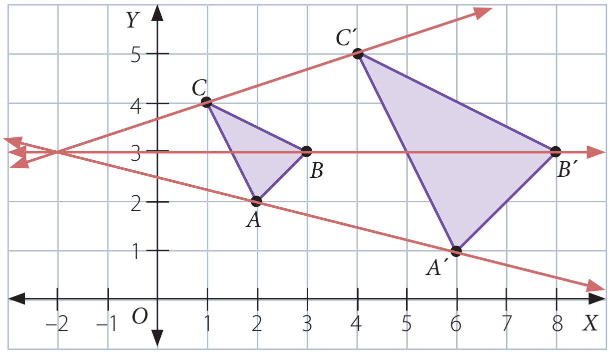
BDA U3_ACT_4

» Ejemplo 7

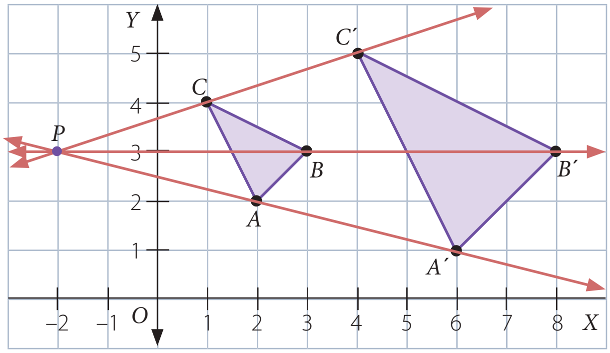
Al triángulo ABC se le aplicó una homotecia y resultó el triángulo $A'B'C'$. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de homotecia P?



1. Traza las rectas que van de cada vértice de la figura original a la figura imagen.



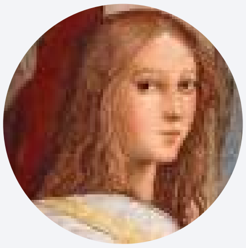
2. Marca el punto P en el que se intersecan las rectas trazadas. Este punto corresponde al centro de homotecia.



Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_60* para seguir practicando con homotecias.

3. Responde.

   Las coordenadas del centro de homotecia P son (–2, 3).



Hipatía de Alejandría (370 - 415)

Se destacó por sus conocimientos en matemática, astronomía y filosofía. Esta matemática, que llevó a cabo un análisis matemático de los movimientos de los astros descritos por el astrónomo Ptolomeo, mantuvo a lo largo de su vida la tesis heliocentrista, cuestionando la teoría geocéntrica de Ptolomeo.

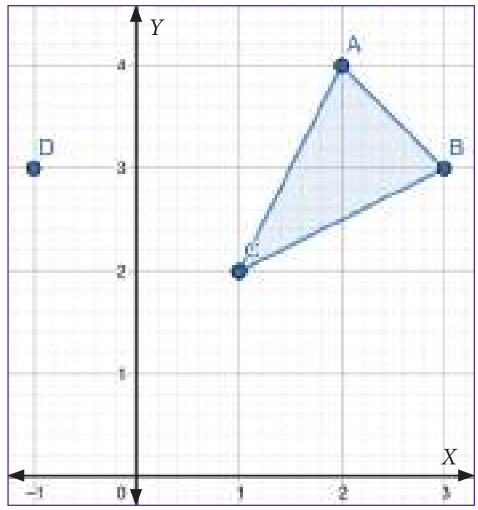
» Ejemplo 8

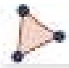
Construye una homotecia utilizando un *software* educativo.

Nota: la aplicación GeoGebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

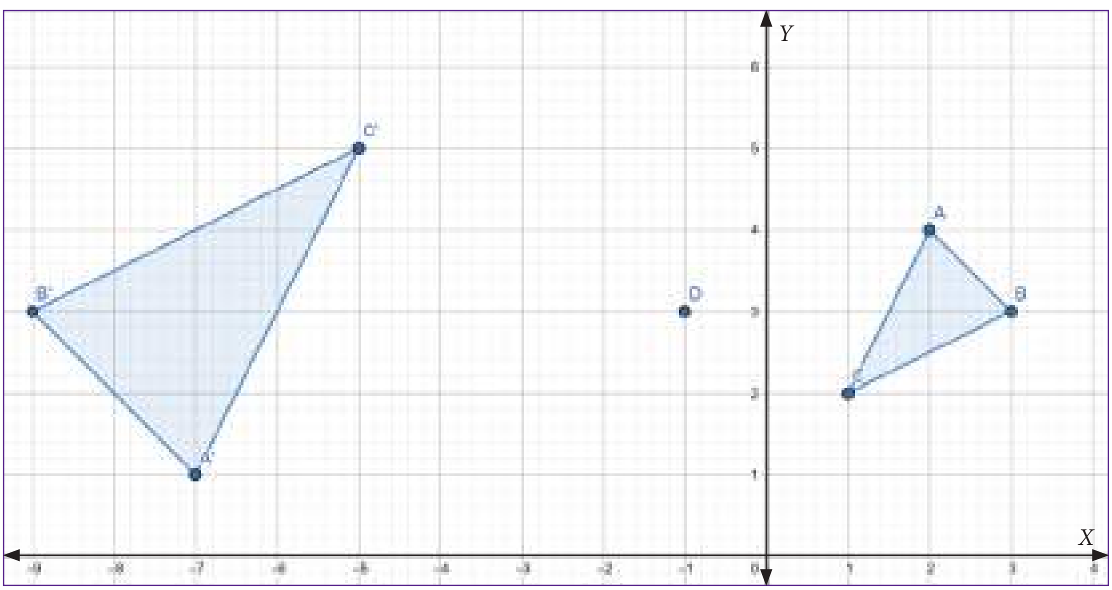
Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_61* para acceder al *software* GeoGebra

Considera los siguientes pasos:



1. Utiliza el botón  para construir un polígono.
2. Con el botón  ubica el centro de homotecia, en este caso es D.
3. Finalmente, con el botón  haz clic en la figura, el centro de homotecia y luego se abrirá esta ventana, que es donde debes ingresar el valor de la razón de homotecia.

Al presionar , obtienes la homotecia del triángulo ABC.



- En este caso, ¿es correcto afirmar que el triángulo ABC triplicó su tamaño?, ¿por qué?
- Si en el **Ejemplo 8** la figura original fuese el triángulo $A'B'C'$ y la figura imagen el triángulo ABC, ¿se mantiene la razón de homotecia? ¿Cómo la determinarías?

BDA U3_ACT_5 a 8

Homotecia vectorial

Vista desde abajo de una torre de alta tensión.

Las torres eléctricas son estructuras diseñadas para soportar y transportar cables de alta tensión que llevan electricidad a través de largas distancias.

Estas torres están hechas con un enfoque en la simetría para garantizar su estabilidad y resistencia estructural. La simetría en el diseño de las torres eléctricas permite distribuir uniformemente las cargas y minimizar los puntos débiles, lo que ayuda a garantizar su seguridad y durabilidad.

- En tu ciudad, ¿has visto torres eléctricas de cerca?
- ¿A qué crees que se refiere que las torres eléctricas son simétricas?
- ¿Cómo explicarías con tus palabras el concepto de homotecia?
- Si miras una torre desde abajo, como se muestra en la imagen, ¿puedes reconocer algún tipo de homotecia?
- ¿Puedes observar en la imagen más de una homotecia? Comenta y comparte con tu curso.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_62* para conocer más aplicaciones de las homotecias.

Vectores

En el plano cartesiano, un **vector** se puede representar como un segmento de recta orientado y determinado por dos puntos: un origen y un extremo. De esta manera, un vector se caracteriza por su longitud, dirección y sentido.

Al **multiplicar** un vector $\vec{w}$ por un escalar α se obtiene otro vector, que corresponde al **vector ponderado** de $\vec{w}$. Si $\vec{w} = (x, y)$, al multiplicar por α obtienes:

$$\alpha \cdot \vec{w} = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = (\alpha x, \alpha y)$$

El vector w se puede representar simbólicamente como $\vec{w}$.

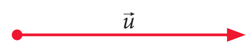
Un vector ponderado cumple con lo siguiente:

- Mantiene la dirección del vector.
- Si $\alpha = 0$, se obtiene el vector nulo, es decir, $0 \cdot \vec{w} = 0 \cdot (x, y) = (0 \cdot x, 0 \cdot y) = (0, 0)$.
- Si $\alpha < 0$, el vector cambia de sentido.
- Si $\alpha > 0$, el vector mantiene el sentido.

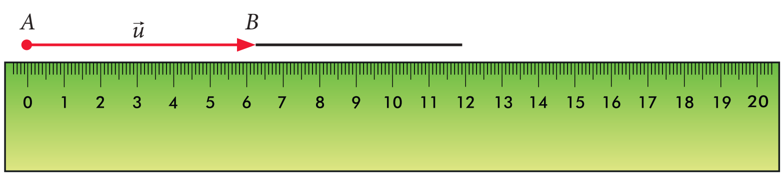
A continuación, representarás **vectores ponderados** para trabajar con ellos posteriormente en la aplicación de **homotecias**.

Ejemplo 1

Representa el vector ponderado $2 \cdot \vec{u}$ utilizando regla y luego compás.

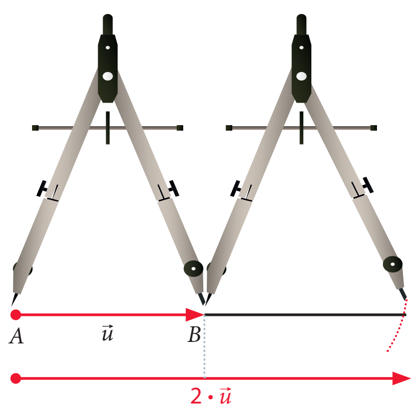


1. Al multiplicar $\vec{u}$ por un escalar mayor que 0, el vector ponderado mantiene la dirección y sentido, por lo que con una regla trazas un segmento de línea en el sentido del vector.



A representa el inicio del vector $\vec{u}$ y B su final. El vector $\vec{u}$ se puede simbolizar también como $\overrightarrow{AB}$.

2. Utiliza el compás con centro en A y radio $\overline{AB}$. A partir de B, replicas la amplitud del vector $\vec{u}$ y obtienes el vector $2\,\vec{u}$, como se muestra en la imagen.



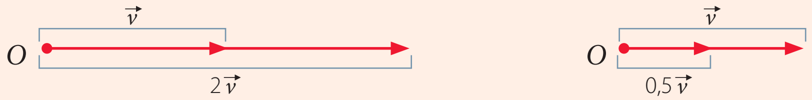
- ¿Qué diferencias aprecias entre el vector $\vec{u}$ y el vector $2\vec{u}$?
- ¿Cómo representarías usando regla y compás el vector $0{,}5 \cdot \vec{u}$? Explica.

BDA U3_ACT_9

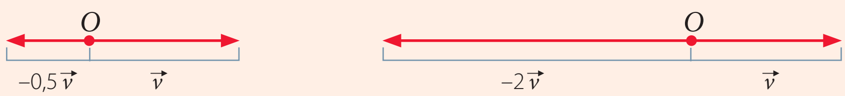
Homotecia vectorial

Al aplicar una **homotecia de centro O**, tal que el valor de la razón k sea distinto de cero ($k \neq 0$), a un vector $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, se obtiene lo siguiente:

- Si $k > 0$, el sentido del vector no cambia.



- Si $k < 0$, el sentido del vector se invierte.

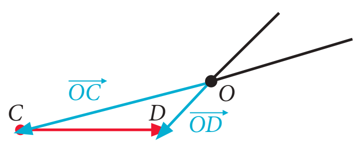


A continuación, describirás la **homotecia** de figuras planas mediante el **producto** de un **vector** y un **escalar**.

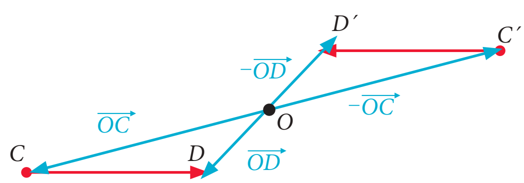
Ejemplo 2

Construye mediante una homotecia la imagen del vector $\overrightarrow{CD}$ considerando el centro de homotecia O y la razón $k = -1$.

1. Traza los vectores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$. Luego, como el valor del escalar, relacionado con la razón de homotecia, es negativo ($k = -1$), traza un segmento de línea en sentido contrario a cada vector



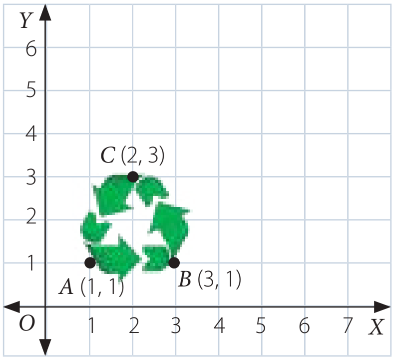
2. Considera la amplitud de los vectores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ y traza los vectores $-\overrightarrow{OC}$ y $-\overrightarrow{OD}$, respectivamente. Así obtendrás el vector $\overrightarrow{C'D'}$ como se muestra a continuación:



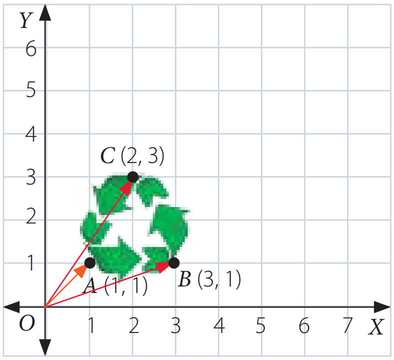
- ¿Qué ocurre si el centro de homotecia cambia de ubicación? Explica.
- ¿Qué propiedades tiene el vector $-\overrightarrow{CD}$ en comparación con el vector $\overrightarrow{CD}$? ¿Y el vector $-2\overrightarrow{CD}$? Comenta con tu curso.

Ejemplo 3

En la imagen se muestra un logotipo universal que encontramos en papeleras, contenedores y otros lugares para referirse al reciclaje. Se representa este símbolo en el plano cartesiano con el triángulo ABC. Para un afiche se necesita agrandar este símbolo y se le aplica una homotecia de centro $O(0, 0)$ y razón $k = 2$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura resultante?



1. Traza los vectores que van desde el centro de homotecia O a cada uno de los vértices, luego multiplica cada uno de los vectores por el escalar k.



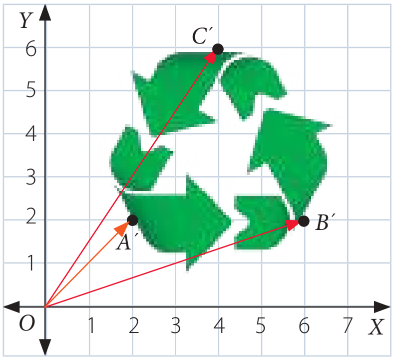
- $k \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot (1, 1) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (2, 2)$
- $k \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \cdot (3, 1) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 1) = (6, 2)$
- $k \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot (2, 3) = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 6)$

Este logotipo fue creado por el arquitecto hawaiano Gary Anderson. Fue un diseño que presentó a un concurso que se celebró con motivo del primer Día de la Tierra, el 22 de abril de 1970.

Las tres flechas que componen el logotipo representan las 3R: reciclar – reducir – reutilizar.

Fuente: Revista EcoCiencias (27 de mayo)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_63

2. Al trazar los vectores ponderados, obtienes los vértices de la figura resultante.



Identifica las coordenadas de los vértices de la figura imagen.

$A'(2, 2)$

$B'(6, 2)$

$C'(4, 6)$

3. Responde.

Las coordenadas de los vértices de la figura que resulta luego de aplicar la homotecia son:

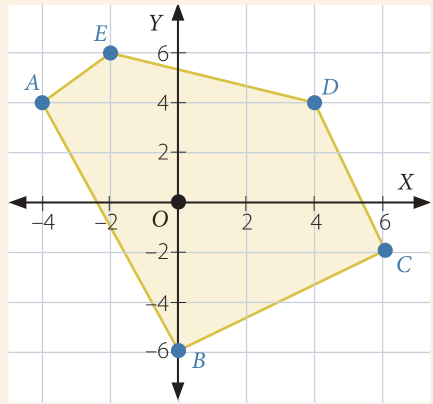
$A'(2, 2)$; $B'(6, 2)$ y $C'(4, 6)$.

- Si la razón de homotecia fuese $k = -1$, ¿la imagen resultante se ubica en el mismo cuadrante del plano cartesiano?, ¿por qué?
- ¿Cómo lo resolverías si el centro de homotecia no estuviera en el origen? Explica.
- ¿Crees que si visualizas los vectores y las figuras en el plano cartesiano puedes comprender mejor los contenidos? Comenta con tu curso.

BDA U3_ACT_10

Ejemplo 4

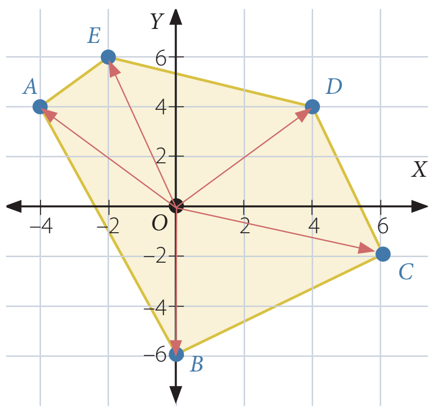
Hoy nos enfrentamos al desafío de promover ciudades y comunidades sostenibles, un objetivo vital para garantizar un futuro próspero para todos. Un programa que pretende ser responsable con el desarrollo de ciudades y comunidades sostenibles está trabajando en un proyecto de diseño urbano que busca mejorar la accesibilidad y la eficiencia energética de sus espacios públicos. Esta acción está en concordancia con el Objetivo de Desarrollo Sostenible **ODS 11** **Ciudades y comunidades sostenibles**, desarrollado por la Organización de Naciones Unidas (ONU) para lograr que las ciudades sean más inclusivas, seguras, resilientes y sostenibles.



El polígono *ABCDE* de la imagen corresponde a un modelo de ciudad. Cada vértice del polígono representa un servicio para la comunidad, ya sean viviendas, escuelas, lugares de trabajo, espacios verdes o supermercados.

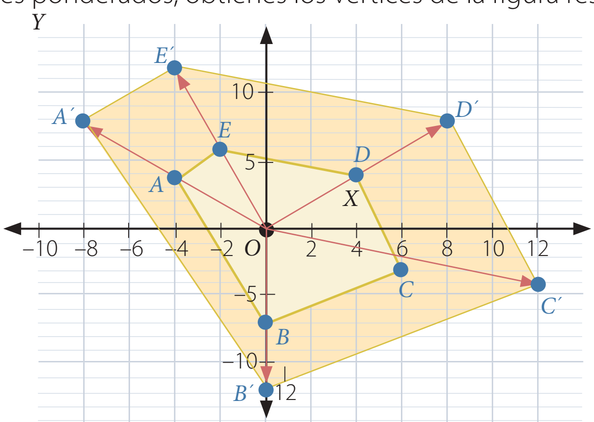
Si la ciudad se expande respecto al punto O en una razón $k = 2$, ¿cuál será la nueva ubicación de los servicios en este modelo de ciudad?

1. Traza los vectores que van desde el centro de homotecia O a cada uno de los vértices, luego multiplica cada uno de los vectores por el escalar k.



- $k \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot (-4, 4) = (2 \cdot -4, 2 \cdot 4) = (-8, 8)$
- $k \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \cdot (0, -6) = (2 \cdot 0, 2 \cdot -6) = (0, -12)$
- $k \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot (6, -2) = (2 \cdot 6, 2 \cdot -2) = (12, -4)$
- $k \cdot \overrightarrow{OD} = 2 \cdot (4, 4) = (2 \cdot 4, 2 \cdot 4) = (8, 8)$
- $k \cdot \overrightarrow{OE} = 2 \cdot (-2, 6) = (2 \cdot -2, 2 \cdot 6) = (-4, 12)$

2. Al trazar los vectores ponderados, obtienes los vértices de la figura resultante.



$A'(-8, 8)$

$B'(0, -12)$

$C'(12, -4)$

$D'(8, 8)$

$E'(-4, 12)$

3. Responde.

La nueva ubicación de los servicios será $A'(-8, 8)$; $B'(0, -12)$; $C'(12, -4)$; $D'(8, 8)$ y $E'(-4, 12)$.

»Ejemplo 5

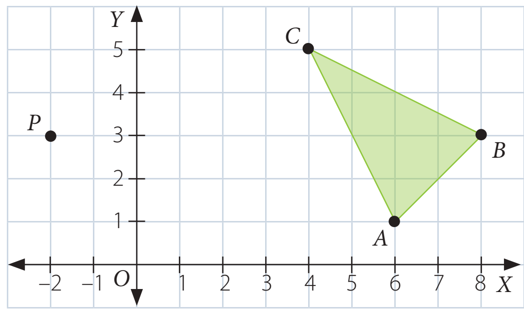
Construye una homotecia para el triángulo ABC con centro en el punto P y con una razón $k = 0{,}5$.

1. Determina las componentes de los vectores que van desde el centro de homotecia P a cada uno de los vértices.

   $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (6, 1) - (-2, 3) = (6 - (-2), 1 - 3) = (8, -2)$

   $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (8, 3) - (-2, 3) = (8 - (-2), 3 - 3) = (10, 0)$

   $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = (4, 5) - (-2, 3) = (4 - (-2), 5 - 3) = (6, 2)$

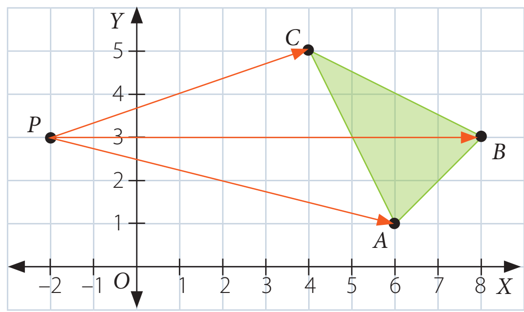


2. Multiplica cada uno de los vectores ponderados por el escalar $k = 0{,}5$.

   ▶ $k \cdot \overrightarrow{PA} = 0{,}5 \cdot (8, -2) = (0{,}5 \cdot 8; 0{,}5 \cdot -2) = (4, -1)$

   ▶ $k \cdot \overrightarrow{PB} = 0{,}5 \cdot (10, 0) = (0{,}5 \cdot 10; 0{,}5 \cdot 0) = (5, 0)$

   ▶ $k \cdot \overrightarrow{PC} = 0{,}5 \cdot (6, 2) = (0{,}5 \cdot 6; 0{,}5 \cdot 2) = (3, 1)$

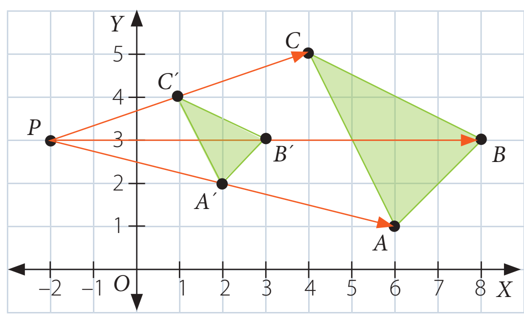


3. Identifica las coordenadas de los vértices de la figura imagen.

   Para representar el vector ponderado $k \cdot \overrightarrow{PA} = (4, -1)$, cuenta 4 unidades a la derecha de P y una unidad hacia abajo de P. Luego ubica el punto A'.

   Para el vector ponderado $k \cdot \overrightarrow{PB} = (5, 0)$, cuenta 5 unidades a la derecha de P y ubica el punto B'.

   Para el vector ponderado $k \cdot \overrightarrow{PC} = (3, 1)$, cuenta 3 unidades a la derecha de P y una unidad hacia arriba de P. Luego ubica el punto C'.



- Explica con tus palabras el concepto de vector ponderado.
- ¿Demostraste confianza en tus capacidades al desarrollar los contenidos? Explica

BDA U3_ACT_11 a 14

» Para finalizar la **Lección 1...**

- ¿Demostraste interés al desarrollar los contenidos? Explica.
- ¿Utilizaste representaciones para aplicar las homotecias? ¿Cómo te ayudaron a comprender el contenido? Explica.
- ¿Cómo el uso de *software* te ayudó a comprender los contenidos desarrollados? Explica.
- En las actividades grupales, ¿trabajaste de forma responsable?, ¿propiciaste instancias de confianza mutua? Explica.
- ¿Crees que los contenidos desarrollados se pueden usar en la mejora de la accesibilidad y la calidad de vida de los residentes de una comunidad? Da ejemplos y compártelos con tu curso.

Lección 2

Semejanza

Un moái traído al continente en 1870 a bordo de la corbeta O'Higgins inició su viaje de retorno en febrero de 2022 en medio de un gran despliegue técnico y una ceremonia que dio cuenta de su valor ancestral y espiritual para el pueblo Rapa Nui.

Fuente: Museo Nacional de Historia Natural Chile (29 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_64

Semejanza de figuras

Los guardias espirituales del pueblo Rapa Nui

Rapa Nui, en pleno océano Pacífico, es la isla y lugar de origen del pueblo Rapa Nui. Poseen una cultura abundante y tradiciones ancestrales. Son conocidos mundialmente por sus impresionantes moáis: icónicas estatuas de piedra que representan a sus antepasados. Para el pueblo Rapa Nui los moáis son símbolos sagrados de conexión con sus ancestros. Estas imponentes figuras no solo sirven como representación física de sus antepasados y de su energía, sino también como guardias espirituales que protegen y guían a la comunidad.
La relación entre los rapa nui y los moái refleja su profundo respeto por la historia y la espiritualidad.

Fuente: Memoria chilena (29 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_65

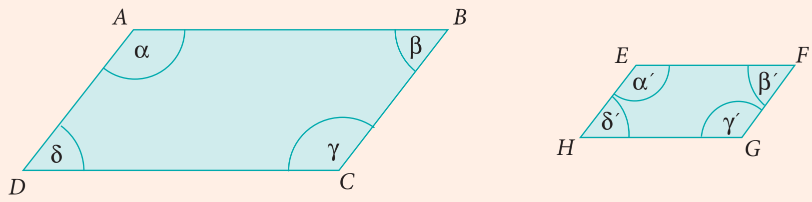
- ¿Observas alguna similitud entre los moáis de la imagen?, ¿cuál?
- ¿Podrías decir que todos los moáis son exactamente iguales?, ¿por qué?
- Se construye una réplica semejante al moái regresado al pueblo Rapa Nui. Si su altura es 1 m, ¿cómo determinarías la medida de su ancho?
- Reflexiona sobre nuestra responsabilidad de proteger y preservar nuestro patrimonio cultural y natural para las generaciones futuras. Comenta con tu curso.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_66* para conocer cómo el moái Tau regresó a Rapa Nui desde el continente.

Semejanza

Dos **figuras** son **semejantes** (~) cuando tienen la misma forma.

Dos **polígonos** son **semejantes** si sus **ángulos** interiores correspondientes son **congruentes** y la **razón** (k) entre las medidas de sus lados correspondientes es **constante**.



Para que el cuadrilátero $ADCB$ sea semejante con el cuadrilátero $EHGF$, se debe cumplir:

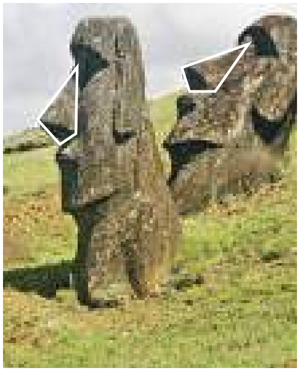
- Los ángulos correspondientes tienen la misma medida: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$.
- La medida de los lados correspondientes son proporcionales. La constante de proporcionalidad k recibe el nombre de **razón de semejanza**.

$$k = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$$

A continuación, aplicarás **propiedades de semejanza y de proporcionalidad** a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria.

Ejemplo 1

Francisca quiere dibujar los dos moáis que se muestran en la imagen. Comienza por dibujar sus narices. Observa que estas se asemejan a cuadriláteros, como se muestra en la siguiente imagen:



¿Son semejantes estos cuadriláteros?

1. Verifica si los ángulos correspondientes de los cuadriláteros tienen la misma medida.

   $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle B'A'D'$ $\quad$ $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle C'B'A'$

   $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle D'C'B'$ $\quad$ $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle A'D'C'$

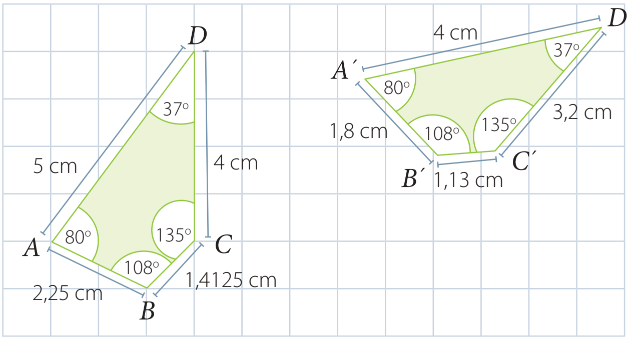
   $\cong$: congruente

   $\sphericalangle$: ángulo.

2. Calcula la razón entre las medidas de los lados correspondientes del cuadrilátero.

   $\frac{AB}{A'B'}$ ▶ 2,25 : 1,8 = 1,25 $\quad$ $\frac{BC}{B'C'}$ ▶ 1,4125 : 1,13 = 1,25

   $\frac{CD}{C'D'}$ ▶ 4 : 3,2 = 1,25 $\quad$ $\frac{AD}{A'D'}$ ▶ 5 : 4 = 1,25



3. Responde.

   Las medidas de los ángulos correspondientes son congruentes y la razón entre las medidas de los lados correspondientes es la misma. Por lo tanto, los polígonos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son semejantes.

BDA U3_ACT_15

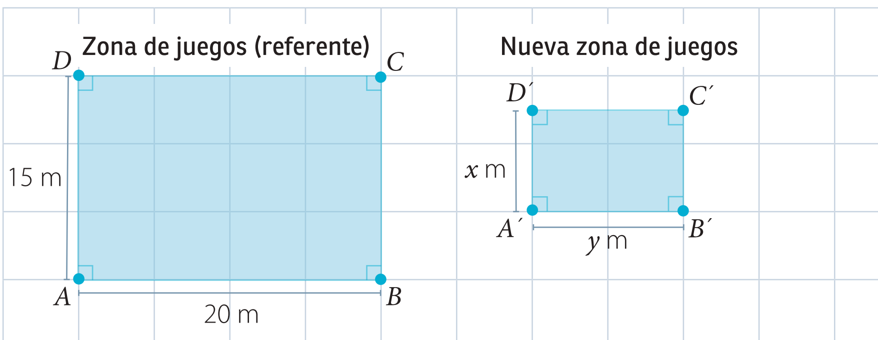
Ejemplo 2 » Educación ambiental

En una iniciativa de reciclaje comunitario se quiere construir una zona de juegos infantiles usando neumáticos reciclados. Se usa como referencia la zona de juegos que se muestra en la imagen.

Para minimizar el impacto ambiental y promover la reutilización de materiales, se usaron neumáticos reciclados tanto para cercar el espacio como para crear juegos. Esta nueva zona de juegos estará en un lugar más reducido, por lo que se debe considerar una escala de 1 : 2. ¿Cuáles deben ser las medidas del espacio que cerque el nuevo parque infantil?

Zona de juegos de forma rectangular, de 15 m de ancho y 20 m de largo.

1. Representa la situación descrita con un dibujo. Las medidas de la nueva zona de juegos se representan por x (ancho) e y (largo).



2. Interpreta la escala 1 : 2 que se usará para construir la nueva zona de juegos

   La escala o razón 1 : 2 significa que 1 m de la nueva zona de juegos corresponde a 2 m de la zona de juegos que se utiliza como referente.

3. Determina si los rectángulos $A'B'C'D'$ y $ABCD$ son semejantes.

   Los rectángulos $A'B'C'D'$ y $ABCD$ son semejantes, ya que sus ángulos correspondientes son congruentes y la razón entre las medidas de sus lados correspondientes es 1 : 2.

4. Plantea las proporciones entre las medidas de los lados correspondientes y resuelve.

   $$\frac{1}{2} = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{20} \Leftrightarrow y = \frac{1 \cdot 20}{2} = 10 \text{ m} \qquad \frac{1}{2} = \frac{A'D'}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow x = \frac{1 \cdot 15}{2} = 7{,}5 \text{ m}$$

5. Responde.

   La nueva zona de juegos debe medir 10 m de largo y 7,5 m de ancho.

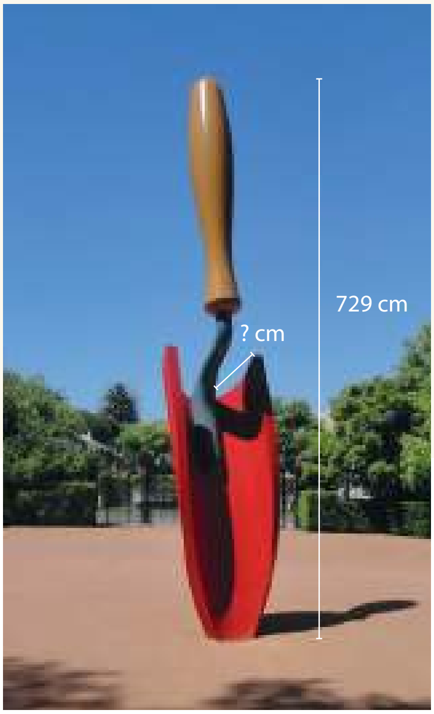
- ¿Qué acciones crees que promueven y apoyan proyectos de diseño urbano sostenible que integren la reutilización de materiales y la práctica de la semejanza de figuras en su planificación y ejecución? Comenta con tu curso.

EJEMPLO 3 » Conecta con **Artes Visuales**

Claes Oldenburg (1929-2022) fue un pintor, escultor, dibujante y un artista especializado en arte público, con réplicas a gran escala de objetos cotidianos y esculturas blandas que son características de su identidad y que están en varias ciudades y museos de todo el mundo.

La pala es una popular escultura urbana a enorme escala que reposa en los jardines del Museo Serralves de Porto. En esta obra, Oldenburg participa junto con la escultora Coosje van Bruggen, mostrando un gigantesco y colorido objeto tomado de los elementos más comunes de la vida cotidiana (herramienta de trabajo), pero aumentado y puesto en un lugar público para sorpresa del paseante.

Fuente: Historia/Arte (29 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_67



En la asignatura de Artes Visuales, Manuel ha analizado algunas manifestaciones visuales a partir de sus características. Al observar esta obra, quiere saber cuál es la «gran escala» usada por estos artistas. Busca en las herramientas de su casa una pala de jardín semejante a la de la escultura y mide las longitudes representadas en la imagen, obteniendo 27 cm y 5 cm, respectivamente. ¿Cuál es la medida que falta en la imagen de la escultura?

1. Determina la escala utilizada por los artistas en su obra según las medidas tomadas por Manuel

Pala de Manuel. **Pala de Oldenburg y van Bruggen.**

$$27 \text{ cm} : 729 \text{ cm} = 1 : 27$$

2. Interpreta la escala obtenida.

   La escala 1 : 27 significa que 1 cm del objeto en la realidad corresponde a 27 cm en la obra de Claes Oldenburg y Coosje van Bruggen.

3. Calcula la medida que falta en la imagen de la escultura.

   La medida que falta en la imagen se representará como x.

   Como ambas palas son semejantes, puedes plantear la siguiente proporción entre sus medidas:

$$\frac{1}{27} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow 1 \cdot x = 27 \cdot 5 \Leftrightarrow x = 135 \text{ cm}$$

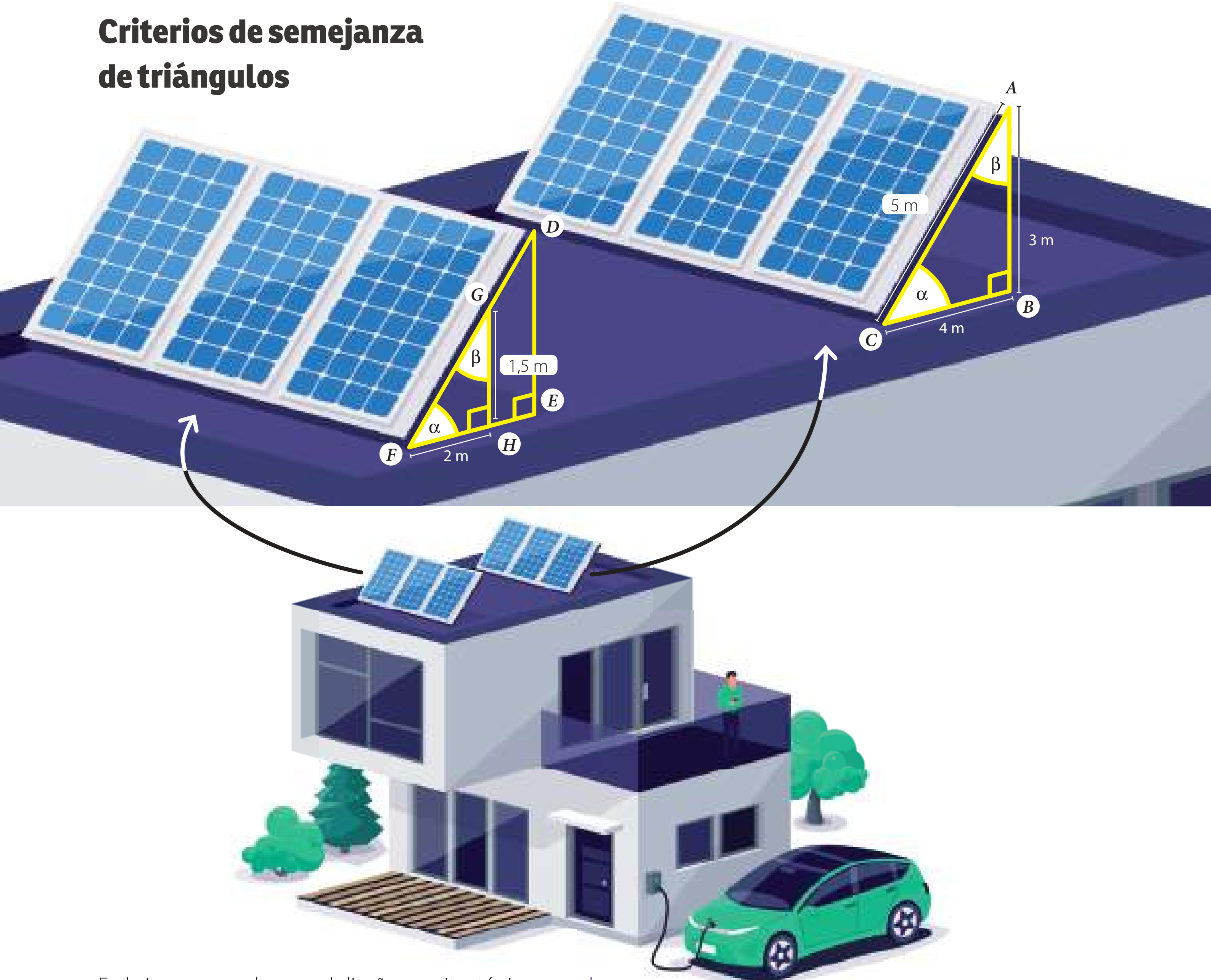
4. Responde.

   La medida que falta en la imagen de la escultura es 135 cm.

- ¿Qué entiendes por semejanza? Explícalo utilizando tus palabras.
- ¿Cómo se relaciona la semejanza de figuras con las homotecias?
- ¿Dos figuras congruentes siempre son semejantes?, ¿cuál sería en tal caso la razón de semejanza?
- ¿Ocurrirá que dos figuras que son semejantes siempre son congruentes? Justifica.
- ¿Argumentaste y explicaste tus respuestas de manera clara? Explica.

BDA U3_ACT_16 a 19

Criterios de semejanza de triángulos



En la imagen se observa el diseño arquitectónico sustentable de una casa, en el que puedes ver que los paneles solares están estratégicamente inclinados, formando triángulos con la superficie del techo. Esto se hace para captar la mayor cantidad de energía solar posible. Esta inclinación es importante porque los rayos del sol viajan en líneas rectas y su ángulo de incidencia afecta la cantidad de energía que pueden generar los paneles solares.

Si observas con detención los triángulos que se forman, estos pueden variar en tamaño, pero no en forma, lo que asegura la eficiencia energética del diseño.

Fuente: Ministerio de Energía (29 de abril de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_68

- ¿Los segmentos FH y CB, y GH y AB que se muestran en la imagen son proporcionales? Argumenta tu respuesta.
- Para calcular la distancia entre G y F sin utilizar el teorema de Pitágoras, ¿qué distancia necesitas saber? Explica.
- Si el segmento GF mide 2,5 m, ¿los triángulos GFH y ACB son semejantes? Justifica.

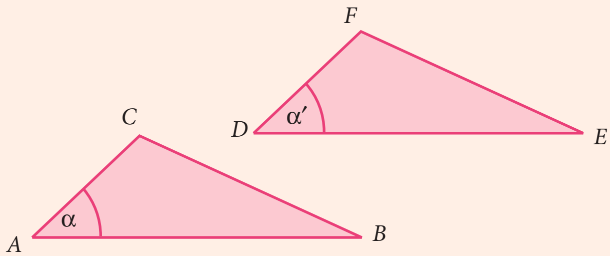
Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_69* para conocer más acerca de los beneficios de la energía solar

Criterios de semejanza de triángulos

Los **criterios de semejanza** de triángulos establecen condiciones suficientes para decidir si dos triángulos son o no semejantes.

Criterio lado, ángulo, lado (LAL)

Dos triángulos son **semejantes** si dos lados correspondientes tienen medidas proporcionales y el ángulo comprendido por ellos tiene igual medida.



Si se cumple que:

$$\alpha = \alpha' \qquad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

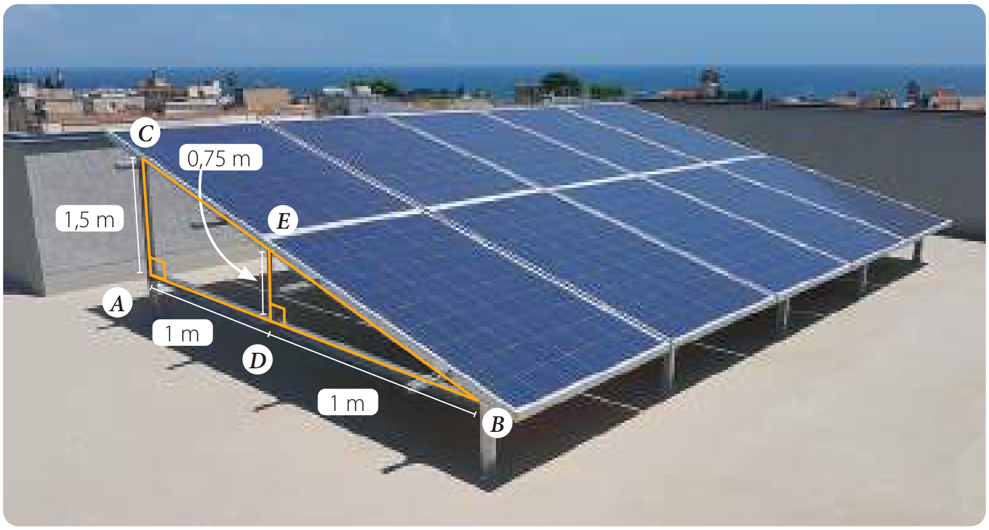
Se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Δ : triángulo.
$\sim$: semejante.

A continuación, aplicarás este **criterio de semejanza de triángulos** en la resolución de problemas relacionados con la vida diaria.

Ejemplo 1

Un edificio cuenta con paneles solares instalados en su techo. En ellos se forman los triángulos que se muestran en la imagen. ¿Son semejantes los triángulos ABC y DBE?



1. El ángulo formado entre los lados que tienen las medidas anotadas es igual en ambos triángulos, ya que mide 90°.
2. Determina si las medidas de los lados correspondientes son proporcionales.

$$\frac{AC}{DE} \blacktriangleright \frac{1{,}5}{0{,}75} = 2 \qquad \frac{AB}{DB} \blacktriangleright \frac{2}{1} = 2$$

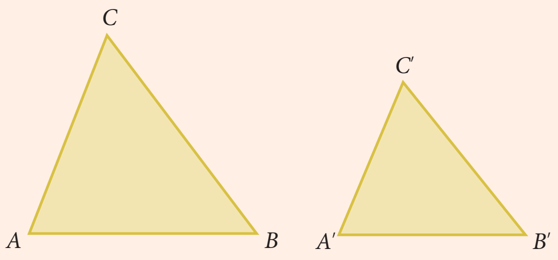
3. Responde.

Se cumple el criterio lado, ángulo, lado (LAL), por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta DBE$.

BDA U3_ACT_20 U3_IMA_1

Criterio lado, lado, lado (LLL)

Dos triángulos son **semejantes** si los tres pares de lados correspondientes tienen medidas proporcionales.



Si se cumple que:

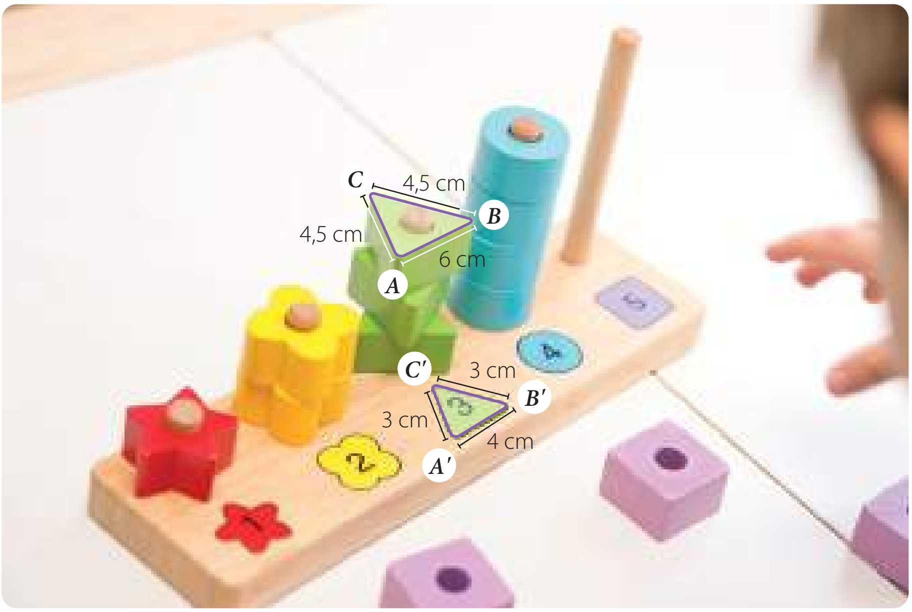
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Ahora continuarás usando este **criterio de semejanza de triángulos** en la resolución de problemas.

Ejemplo 2

Los triángulos que se muestran en el juego de encaje ¿son semejantes?



1. Calcula el valor de la razón entre los lados correspondientes.

$$\frac{AB}{A'B'} \blacktriangleright \frac{6}{4} = 1{,}5 \qquad \frac{BC}{B'C'} \blacktriangleright \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5 \qquad \frac{AC}{A'C'} \blacktriangleright \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$

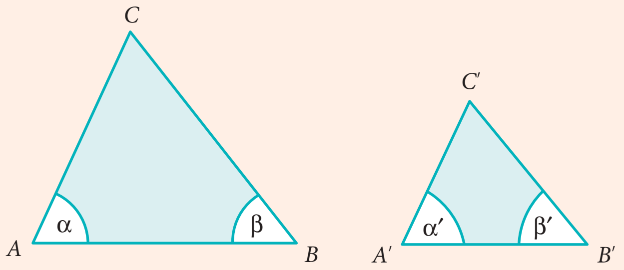
2. Responde.

   Se cumple el criterio lado, lado, lado (LLL), por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

- Explica utilizando tus palabras los criterios LAL y LLL de semejanza de triángulos.
- ¿Qué criterio de semejanza se puede considerar para justificar que los triángulos equiláteros son semejantes? Explica. ¿Existe un solo criterio? Justifica.
- ¿Participaste en la búsqueda de soluciones y expusiste tus argumentos? Explica.

Criterio ángulo, ángulo (AA)

Dos triángulos son **semejantes** si dos de sus ángulos interiores correspondientes tienen igual medida.



Si se cumple que:

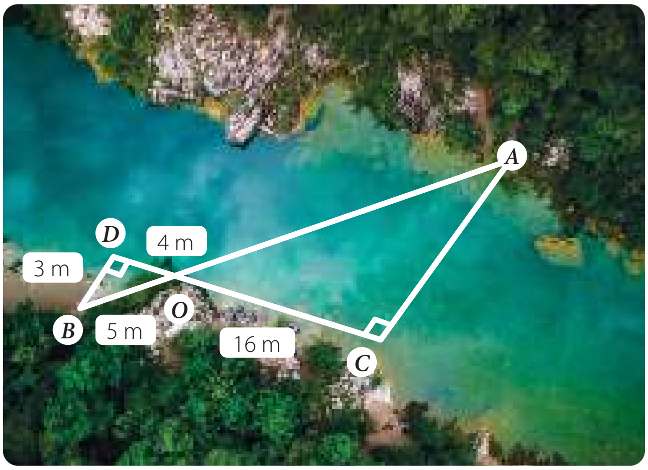
$$\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta'$$

Se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Seguirás comprendiendo los **criterios de semejanza de triángulos** y los aplicarás en la resolución de problemas.

Ejemplo 3

Se quiere cruzar nadando un río, comenzando desde el punto A y nadando en línea recta hacia el punto O, como se muestra en la imagen.



- ¿Cuál es la distancia que se nadará (OA)?
- ¿Cuánto mide el ancho del río (AC)?

1. Identifica los ángulos congruentes entre los triángulos AOC y BOD.

   $\sphericalangle ACO \cong \sphericalangle BDO$ ▶ Ambos ángulos miden 90°.

   $\sphericalangle COA \cong \sphericalangle DOB$ ▶ Son opuestos por el vértice.

2. Por el criterio ángulo, ángulo (AA), los triángulos AOC y BOD son semejantes.

3. Al ser semejantes los triángulos AOC y BOD, las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales. Por lo tanto, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} \blacktriangleright \frac{16}{4} = \frac{OA}{5}$$

$$4 \cdot OA = 16 \cdot 5$$

$$4 \cdot OA = 80 \; / : 4$$

$$OA = 20 \text{ m}$$

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} \blacktriangleright \frac{16}{4} = \frac{AC}{3}$$

$$4 \cdot AC = 16 \cdot 3$$

$$4 \cdot AC = 48 \; / : 4$$

$$AC = 12 \text{ m}$$

4. Responde.

   - La distancia que se nadará es 20 m.
   - El ancho del río mide 12 m.

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo BDO obtienes:

$$BD^2 + 4^2 = 5^2$$

$$BD^2 + 16 = 25$$

$$BD^2 = 25 - 16$$

$$BD^2 = 9$$

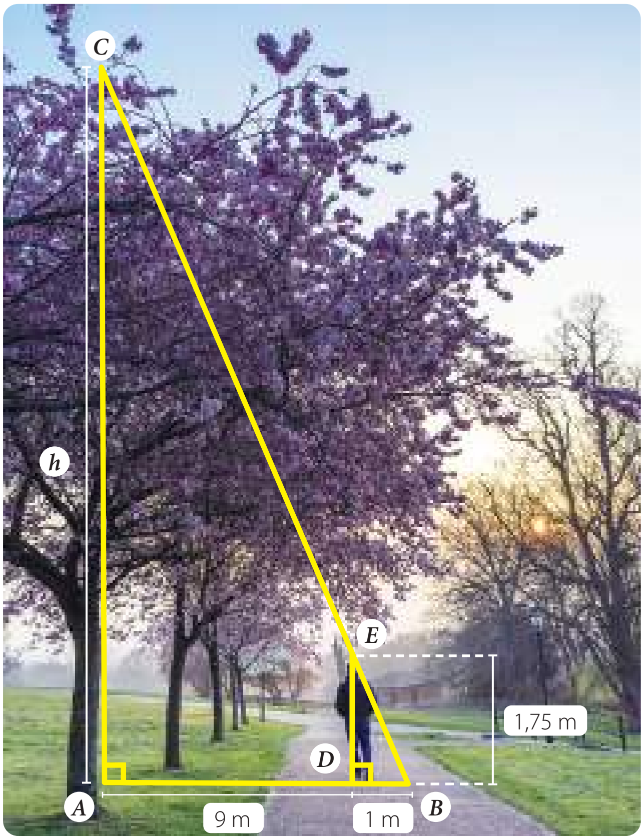
$$BD = \sqrt{9}$$

$$BD = 3 \text{ m}$$

BDA U3_ACT_21

EJEMPLO 4

A partir de los datos registrados en la imagen, determina la altura h del árbol empleando semejanza de triángulos.



1. Determina si los triángulos ABC y DBE son semejantes.

   Identifica los ángulos congruentes entre los triángulos.

   $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BDE$ ▶ Ambos ángulos miden 90°.

   $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle EBD$ ▶ Ambos triángulos comparten este ángulo.

   Por el criterio ángulo, ángulo (AA), los triángulos ABC y DBE son semejantes.

2. Al ser semejantes los triángulos ABC y DBE, las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales. Por lo tanto, se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} \blacktriangleright \frac{h}{1{,}75} = \frac{10}{1}$$

$$h \cdot 1 = 1{,}75 \cdot 10$$

$$h = 17{,}5 \text{ m}$$

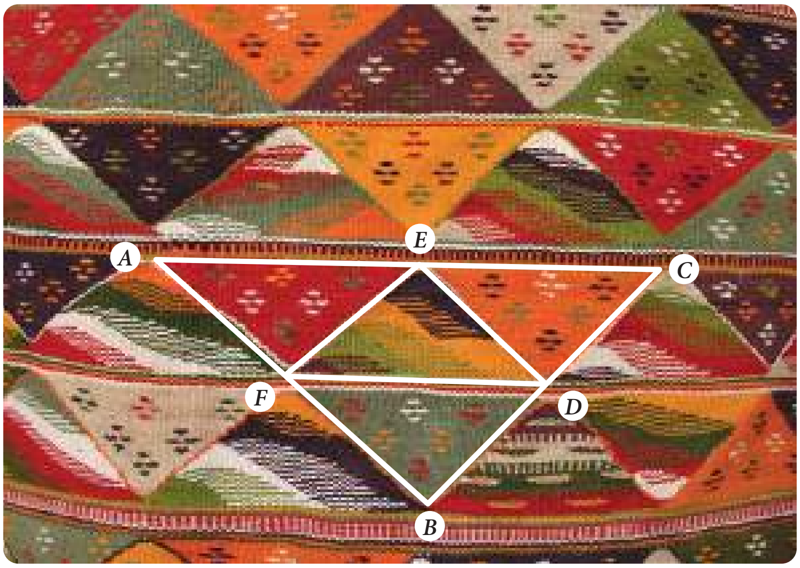
3. Responde.

   La altura del árbol es 17,5 m.

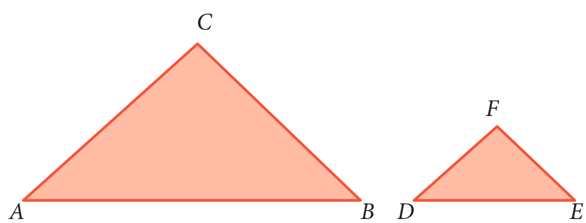
- Si tienes menos datos de los triángulos, ¿se te ocurre alguna forma de cómo concluir si son o no semejantes? Descríbela y coméntala con tu curso.

≫ Ejemplo 5

En el diseño de la alfombra de la imagen los triángulos ABC y DEF son semejantes.
Además, $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 10$ cm y $DE = 6$ cm.
Calcula la medida de los segmentos EF y DF.



1. Dibuja los triángulos para identificar sus lados correspondientes.



2. Al ser semejantes los triángulos ABC y DEF, las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales. Por lo tanto, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \blacktriangleright \frac{12}{6} = \frac{10}{DF}$$

$$12 \cdot DF = 6 \cdot 10$$

$$12 \cdot DF = 60 \ / :12$$

$$DF = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \blacktriangleright \frac{12}{6} = \frac{8}{EF}$$

$$12 \cdot EF = 6 \cdot 8$$

$$12 \cdot EF = 48 \ / :12$$

$$EF = 4 \text{ cm}$$

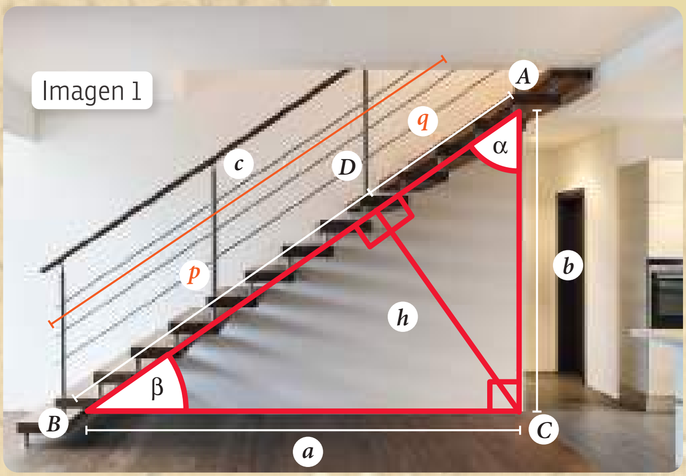
3. Responde.

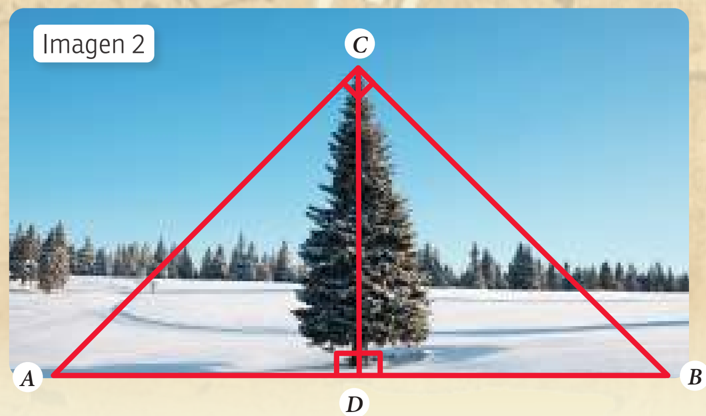
El segmento DF mide 5 cm y el segmento EF mide 4 cm.

- Explica en qué situaciones puedes aplicar los criterios de semejanza de los triángulos.
- Explica con un ejemplo cada uno de los criterios de semejanza de triángulos.
- ¿Hubo algún criterio que no comprendieras?, ¿cuál?
- ¿Cómo crees que fue tu trabajo en el desarrollo de estos contenidos? ¿Qué podrías mejorar?

BDA U3_ACT_22 a 25

Teorema de Euclides





Usando la semejanza y la proporcionalidad, el matemático Euclides contribuyó con la arquitectura en cuanto a diseño y sustentabilidad.

Euclides fue un matemático griego que vivió en el siglo III a. C. Es conocido por ser uno de los fundadores de la Geometría, lo que queda a la vista en su obra más famosa Los elementos. Su contribución a través de teoremas y axiomas geométricos son un aporte fundamental no solo para el desarrollo de la matemática en sí, sino también para otras áreas, como la Física y la Ingeniería.

Euclides dijo «Todo lo que se afirma sin pruebas, puede ser negado sin ellas», por eso es importante demostrar las afirmaciones en Matemática. Es increíble que más de 2 000 años después los aportes de este matemático sigan siendo una base fundamental para el desarrollo humano.

Fuente: Apolonio (2 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_70

- En las imágenes ¿puedes encontrar triángulos rectángulos?, ¿cuáles?
- En la imagen 1, ¿cómo calcularías la distancia de la escalera al punto C de la muralla, es decir la distancia $\overline{BC}$?
- En la imagen 2, ¿son semejantes los triángulos ACD y CBD? Justifica.
  ¿El triángulo ABC es semejante con alguno de los triángulos que se forman? Explica.
- ¿Cómo calcularías la medida de los segmentos que van desde la cúspide del pino hasta el suelo? ¿Y la altura del pino? Comenta con tu curso.
- ¿Crees que el diseño de la escalera o la estabilización del pino tienen relación con el teorema de Euclides? A partir de los próximos ejemplos, conocerás la aplicación de este teorema.

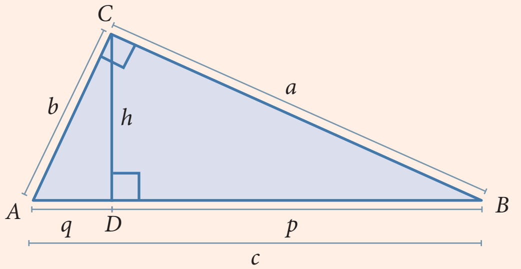
Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU3_71* para saber más acerca de Euclides.

Teorema de Euclides

En el ΔABC, rectángulo en C, la altura desde el vértice C corta al lado $\overline{AB}$ en un punto D, formando dos nuevos triángulos rectángulos, ΔACD y ΔCBD. En estos triángulos es posible establecer la siguiente relación:

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$$

A partir de lo anterior, es posible expresar los **teoremas de Euclides**:



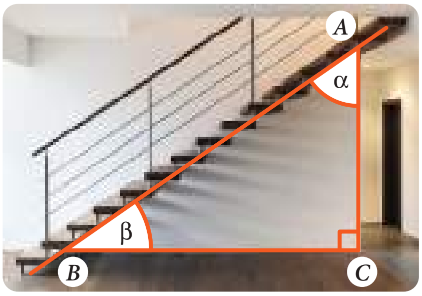
$a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$ — Referente a los catetos a y b del triángulo.

$h^2 = p \cdot q$ ▶ Referente a la altura h.

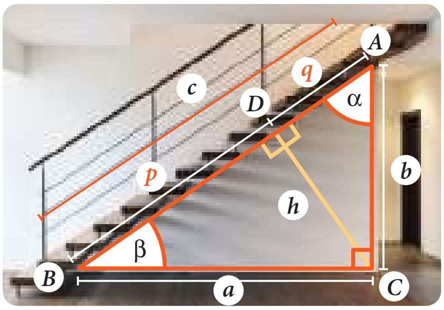
A continuación, comprenderás y aplicarás los **teoremas de Euclides** utilizando la semejanza de triángulos en la resolución de problemas relacionados con la vida diaria.

Ejemplo 1

Observa la escalera que se muestra en la imagen. Bajo ella se puede representar un triángulo rectángulo. Verifica los teoremas de Euclides en este triángulo.



1. Traza la altura en C y registra las medidas h, p y q en el triángulo ABC.



2. Determina la medida de $\sphericalangle ACD$ y $\sphericalangle DCB$.

En el ΔABC se cumple lo siguiente: $\alpha + \beta + 90° = 180°$ ▶ $\alpha + \beta = 90°$ ▶ $\beta = 90° - \alpha$ ▶ $\alpha = 90° - \beta$

En el ΔADC se cumple lo siguiente: $\alpha + 90° + \sphericalangle ACD = 180°$ ▶ $\alpha + \sphericalangle ACD = 90°$
▶ $\sphericalangle ACD = 90° - (90° - \beta) = 90° - 90° + \beta = \beta$

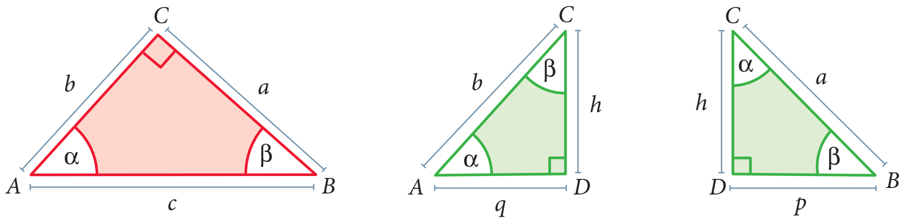
En el ΔDBC se cumple lo siguiente: $\beta + 90° + \sphericalangle DCB = 180°$ ▶ $\beta + \sphericalangle DCB = 90°$
▶ $\sphericalangle DCB = 90° - (90° - \alpha) = 90° - 90° + \alpha = \alpha$

Por lo tanto, $\sphericalangle ACD = \beta$ y $\sphericalangle DCB = \alpha$

BDA U3_ACT_26 U3_AUD_1

3. Determina si los triángulos ABC, ACD y CBD son semejantes.

Los triángulos ABC, ACD y CBD tienen los ángulos α y β en común, como se muestra en las figuras. Por el criterio de semejanza ángulo, ángulo (AA), los triángulos ABC, ACD y CBD son semejantes.



4. Establece las proporciones entre las medidas de los lados correspondientes de los triángulos semejantes.

$\Delta\ ABC \sim \Delta\ ACD$	$\Delta\ CBD \sim \Delta\ ACD$	$\Delta\ ABC \sim \Delta\ CBD$
$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$	$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}$	$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$
$\frac{c}{b} = \frac{b}{q}$	$\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$	$\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$
$b \cdot b = c \cdot q$	$h \cdot h = p \cdot q$	$a \cdot a = c \cdot p$
$b^2 = c \cdot q$	$h^2 = p \cdot q$	$a^2 = c \cdot p$

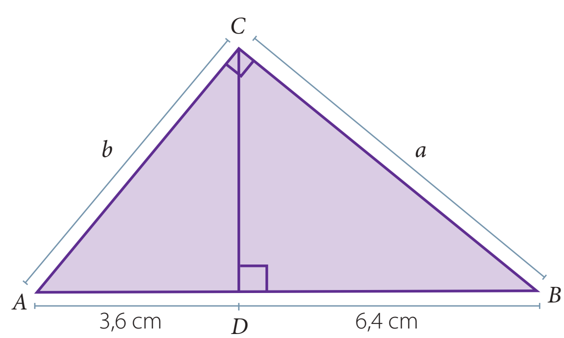
Teoremas de Euclides

5. Responde.

En el triángulo rectángulo formado entre la escalera y la pared se verifican los teoremas de Euclides.

Ejemplo 2

Calcula las medidas de a y b del ΔABC de la figura.



1. Determina las medidas de los catetos p y q de los triángulos ACD y CBD, y de la hipotenusa c.

$p = 6{,}4$ cm $\qquad q = 3{,}6$ cm

$c = q + p = 3{,}6$ cm $+ 6{,}4$ cm $= 10$ cm

2. Utiliza los teoremas de Euclides referentes a los catetos a y b del triángulo ABC.

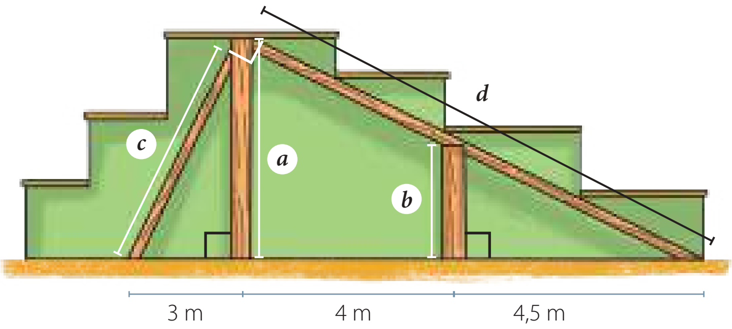
$a^2 = c \cdot p$	$b^2 = c \cdot q$
$a^2 = 10 \cdot 6{,}4$	$b^2 = 10 \cdot 3{,}6$
$a^2 = 64 \;/ \sqrt{\ }$	$b^2 = 36 \;/ \sqrt{\ }$
$a = 8$ cm	$b = 6$ cm

3. Responde.

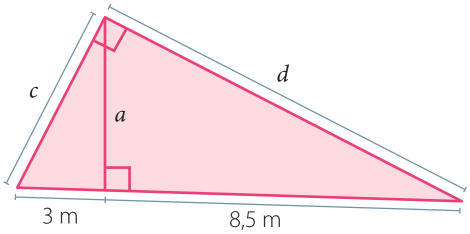
En el triángulo ABC el cateto a mide 8 cm y el cateto b mide 6 cm.

≫ EJEMPLO 3

Para sostener una escalera, se han puesto por debajo las columnas a y b, y las vigas c y d, como se muestra en la imagen. Si las vigas forman entre sí un ángulo recto, ¿cuál será la altura estimada de cada columna y viga?



1. Aplica los teoremas de Euclides para determinar las medidas de la columna a y de las vigas c y d.



$a^2 = p \cdot q$ ▶ Referente a la altura a.

$a^2 = 8{,}5 \cdot 3$

$a^2 = 25{,}5 \;/\sqrt{}$

$a \approx 5$ m

$c^2 = q \cdot e$ ▶ Referente al cateto c, con e la hipotenusa.

$c^2 = 3 \cdot (3 + 8{,}5)$

$c^2 = 3 \cdot 11{,}5$

$c^2 = 34{,}5 \;/\sqrt{}$

$c \approx 6$ m

$d^2 = p \cdot e$ ▶ Referente al cateto d, con e la hipotenusa.

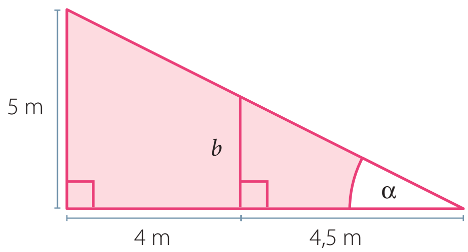
$d^2 = 8{,}5 \cdot (3 + 8{,}5)$

$d^2 = 8{,}5 \cdot 11{,}5$

$d^2 = 97{,}75 \;/\sqrt{}$

$d \approx 10$ m

2. Aplica la semejanza de triángulos para determinar la medida de la columna b.



Los dos triángulos, uno de mayor tamaño y otro más pequeño, en su interior tienen dos ángulos en común, uno de 90° y α. Por el criterio de semejanza de triángulos ángulo, ángulo (AA), ambos triángulos son semejantes y se cumple lo siguiente:

$\dfrac{5}{b} = \dfrac{8{,}5}{4{,}5}$ ▶ $b \cdot 8{,}5 = 5 \cdot 4{,}5$

$b \cdot 8{,}5 = 22{,}5 \;/ : 8{,}5$

$b \approx 2{,}6$ m

3. Responde.

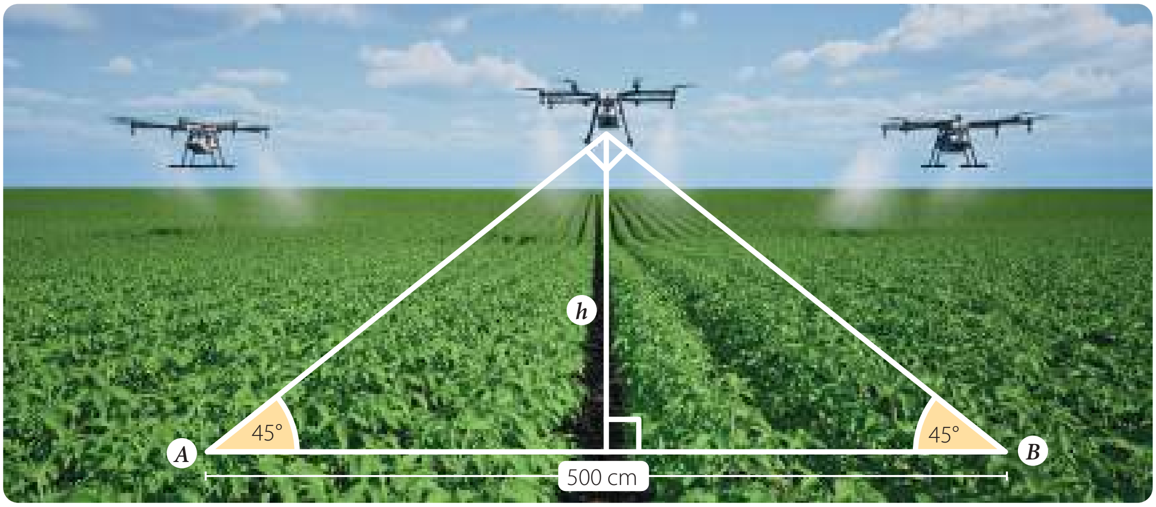
Las columnas miden 5 m y 2,6 m, aproximadamente. Las vigas miden 6 m y 10 m, aproximadamente.

BDA U3_ACT_27

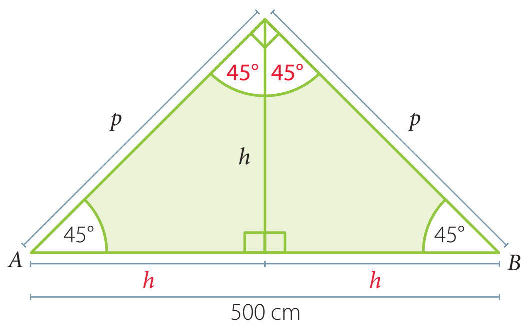
» EJEMPLO 4

Un agricultor utiliza un dron para regar un cultivo que abarca una distancia horizontal de 500 cm, como se muestra en la imagen.

- ¿Cuál es la altura h a la que vuela el dron?
- ¿A qué distancia de los puntos A y B vuela el dron?



1. Identifica las medidas de los ángulos y los catetos de los triángulos rectángulos formados.



La altura h del triángulo rectángulo isósceles lo divide en dos triángulos rectángulos isósceles de menor tamaño. Por lo tanto, sus ángulos de igual medida son de 45° y sus lados de igual medida se representan por h.

2. Determina la medida de la altura h.

$$2h = 500 \ / : 2$$

$$h = 250 \text{ cm}$$

3. Aplica el teorema de Euclides para determinar la medida del cateto p.

$$p^2 = h \cdot 2h$$

$$p^2 = 250 \cdot 500$$

$$p^2 = 125\,000 \ / \sqrt{\ }$$

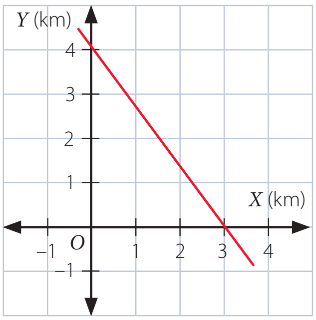
$$p \approx 354 \text{ cm}$$

4. Responde.

- El dron vuela a 250 cm de altura.
- El dron vuela a 354 cm de los puntos A y B, aproximadamente.

Ejemplo 5

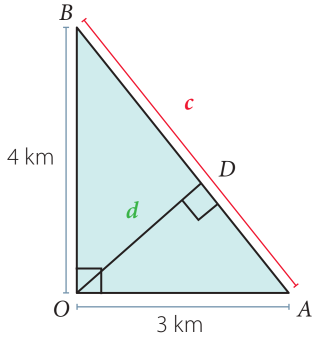
En un proyecto de diseño urbano sostenible para una nueva área residencial se planea construir una avenida principal que conecte diferentes partes del vecindario y promueva la movilidad mediante el uso de transporte público y ciclovías. Sin embargo, también se quiere garantizar que la avenida esté diseñada de manera eficiente y respetuosa con el medio.



El modelo presentado en el plano muestra la avenida en color rojo. Para garantizar que la avenida esté ubicada de manera óptima y minimice su impacto en el entorno, se necesita calcular la distancia entre la avenida y el origen (O) del plano cartesiano, que en este proyecto representa el punto más lejano del área residencial.

Imagina que te contratan como ingeniero para solucionar el problema. ¿Cómo calcularías esa distancia?

1. Representa la distancia d entre O y la avenida.

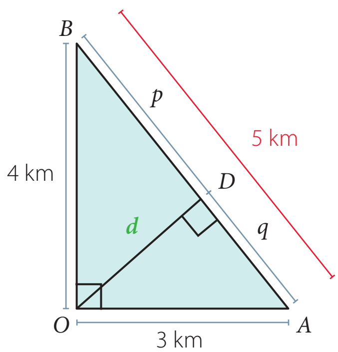


2. Aplica el teorema de Pitágoras para determinar la medida de la hipotenusa c del triángulo OAB.

$$c^2 = 4^2 + 3^2$$
$$c^2 = 16 + 9$$
$$c^2 = 25 \ / \sqrt{\ }$$
$$c = 5 \text{ km}$$

3. Aplica los teoremas de Euclides para calcular la distancia d.

$3^2 = c \cdot q$	$4^2 = c \cdot p$
$9 = 5 \cdot q \ / : 5$	$16 = 5 \cdot p \ / : 5$
$1{,}8 \text{ km} = q$	$3{,}2 \text{ km} = p$



Usando los valores de p y q obtenidos y el teorema de Euclides referente a la altura, puedes calcular el valor de d.

$$d^2 = p \cdot q$$
$$d^2 = 3{,}2 \cdot 1{,}8$$
$$d^2 = 5{,}76 \ / \sqrt{\ }$$
$$d = 2{,}4 \text{ km}$$

4. Responde.

Aplicando los teoremas de Euclides y de Pitágoras, se obtiene que la distancia es 2,4 km.

Para finalizar la **Lección 2**...

- ¿Qué problemas podrías resolver con los contenidos vistos en la lección?
- Explica con tus palabras lo que entiendes por semejanza de figuras.
- ¿Utilizaste procedimientos matemáticos para demostrar los teoremas de Euclides? Descríbelos.
- ¿Participaste en la búsqueda de soluciones a problemas? Explica.
- ¿Cómo te apoyan los modelos geométricos en la comprensión de las situaciones problema?

BDA U3_ACT_28 a 31

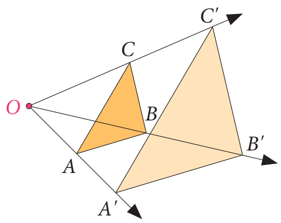
Síntesis de Unidad 3 · Geometría

Lección 1 » Homotecia

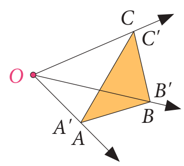
» Aprendiste...

Homotecia directa $k > 0$

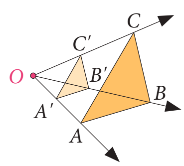
$k > 1$ ▶ Ampliación



$k = 1$ ▶ Congruencia

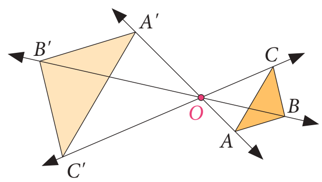


$0 < k < 1$ ▶ Reducción

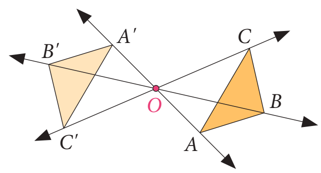


Homotecia inversa $k < 0$

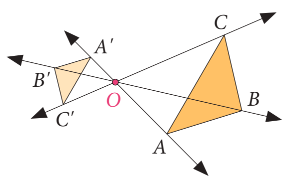
$k < -1$ ▶ Ampliación



$k = -1$ ▶ Congruencia

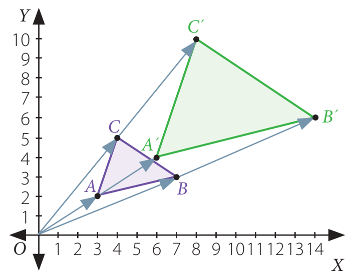


$-1 < k < 0$ ▶ Reducción



Homotecia vectorial

$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x, y)$
$= (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$



Además, siempre se cumple que:

$OP' = k \cdot OP$

Con P un punto cualquiera y k la razón de homotecia.

$k = \dfrac{OP'}{OP}$

¿Trabajaste en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos?

» Lograste...

- Comprender el concepto de homotecia y aplicar sus propiedades en la resolución de problemas.
- Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con *software* educativo.

¿Crees que lo aprendido en esta unidad te ayuda a resolver desafíos matemáticos relacionados con la resolución de problemas reales? ¿Fuiste perseverante y flexible en su resolución?

¿Participaste en la búsqueda de soluciones a problemas? ¿Demostraste interés y curiosidad en su desarrollo? Explica.

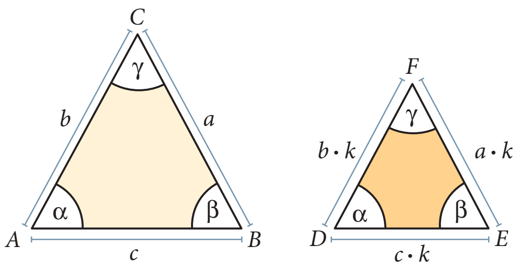
» Aplicaste...

- La resolución de problemas utilizando herramientas computacionales.
- La demostración de resultados mediante definiciones, propiedades y teoremas.
- La evaluación de modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.

Lección 2 » Semejanza

» Aprendiste...

Figuras semejantes



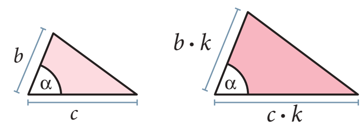
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k$$

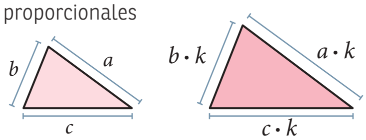
k: razón de semejanza

Criterios de semejanza en triángulos

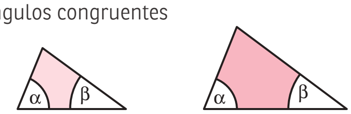
LAL: un ángulo congruente y sus lados adyacentes proporcionales



LLL: lados proporcionales

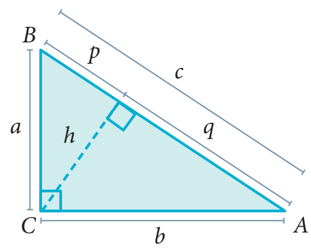


AA: dos ángulos congruentes



Teorema de Euclides

Si tenemos un triángulo rectángulo y su altura desde el ángulo recto, como el triángulo de la imagen, se cumple que:



$a^2 = p \cdot c$

$b^2 = q \cdot c$

$h^2 = p \cdot q$

¿Demostraste interés, esfuerzo, perseverancia en la resolución de problemas reales?

» Lograste...

- Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala, otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.
- Aplicar el teorema de Euclides en la resolución de problemas.

¿Participaste en la búsqueda de soluciones y expusiste tus argumentos? Explica.

¿Trabajaste en equipo de manera responsable y propiciando la confianza mutua?

» Aplicaste...

- La resolución de problemas simplificando el problema y estimando el resultado.
- Soluciones propias y los procedimientos vistos.
- La representación y ejemplificación utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.

BDA U3_ACT_32 y 33

Unidad **4**

Probabilidad y estadística

En esta unidad registrarás distribuciones de dos características distintas de una misma población, en una tabla doble de entrada y en una nube de puntos; además, desarrollarás las reglas de la probabilidad en el contexto de la resolución de problemas relacionados con la salud de las personas.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_72*, para repasar las tablas de frecuencias.


Shuttestock/Stocktrek Images

La encuesta nacional de salud (ENS) es una herramienta que utiliza el Ministerio de Salud para saber qué enfermedades y qué tratamientos están recibiendo hombres y mujeres de 15 años y más que viven en Chile. En dicha encuesta realizada en el período 2016-2017, se estimó que un 31,2 % de los chilenos tiene obesidad, un 27,6 % tiene sospecha de hipertensión y un 12,3 % de las personas tiene diabetes. Estas enfermedades están asociadas a malos hábitos alimentarios y la vida sedentaria y pueden ser muy perjudiciales para la salud.

Fuente: Ministerio de Salud, (22 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_73*

Utiliza la información de los siguientes sitios web para responder:
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_73_1
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_73_2

1. ¿Qué nivel de presión es considerado elevado para una persona?
2. ¿Cuáles son los niveles considerados normales de glucosa en la sangre de una persona con diabetes? La persona dela imagen se midió la glucosa, ¿podría tener diabetes?, ¿por qué?

Habilidades del **siglo XXI**

La matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender a pensar y para resolver problemas. Reflexionar sobre los procedimientos, propios o de otros, comparar o sostener intercambios sobre situaciones matemáticas problemáticas optimiza el proceso de aprendizaje.

- ¿Cómo consideras que la probabilidad y estadística ayudan a entender de mejor manera las enfermedades?
- Solamente observando el nivel de glucosa registrado en la imagen, ¿crees que la persona tiene buenos o malos hábitos alimentarios?, ¿por qué?

Conocimientos previos

- Estos contenidos te ayudarán a abordar el trabajo de esta unidad.

Tabla de frecuencias
Es una representación de la información obtenida de una muestra o población, en relación con los valores que puede tomar una variable. Algunos de los datos que se anotan son los siguientes:

La **frecuencia absoluta** (f), es el número de veces que se repite cierto valor de la variable.

La **frecuencia relativa** (f_r), es la razón entre la frecuencia absoluta y el total de datos de la muestra o población.

Probabilidad

Es una medida de la incertidumbre que está entre 0 y 1. Se puede calcular usando la regla de Laplace o las frecuencias relativas, dependiendo de la situación.

Regla de Laplace

Si los resultados de un experimento (Ω) son equiprobables y finitos, la probabilidad de un evento A se calcula con la siguiente fórmula:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

#: cardinalidad, es la cantidad de elementos de un conjunto.

- ¿Que dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? Explica como podrías resolverlas.

BDA U4_ACT_1 U4_VID_1

Lección 1

Análisis de poblaciones

Registro del deportista										
Deportista	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Horas de sueño	4	5	6	4,5	7,5	8,5	7	6,5	7	7
Horas de entrenamiento	2	2,5	4	3	4	4,5	3,5	2,5	3,5	3
Frecuencia cardíaca (latidos por minuto)	130	120	110	99	105	130	120	100	90	90

Registro de distribuciones

Un club deportivo interesado en el buen rendimiento de sus integrantes y en mantenerlos saludables y libres de lesiones, registra diariamente, usando relojes inteligentes, las horas de sueño, tiempo continuo de entrenamiento de alta intensidad y la frecuencia cardíaca media en cada entrenamiento. La tabla muestra el registro de un día de los 10 deportistas del club.

- ¿Crees que la calidad del sueño afecte el rendimiento deportivo? Explica.
- ¿Cuántas horas de sueño estimas que debe tener un deportista? Justifica.
- La persona de la imagen está en reposo, durmiendo. ¿Cómo es la frecuencia cardíaca en reposo en comparación con la frecuencia cardíaca en entrenamiento?

Relación entre variables

Para analizar una población, comúnmente se evalúa la asociación entre dos o más variables. Por ejemplo, la obesidad y el hábito de ejercicios, la cantidad de horas de sueño y el estado de ánimo, entre otras.

Se pueden relacionar dos variables cualitativas, dos variables cuantitativas, o una variable cuantitativa con otra cualitativa.

Para representar la relación entre dos variables cuantitativas, se suele usar **gráficos de nubes de puntos**, que corresponden a la dispersión de un conjunto de pares ordenados en el plano cartesiano, en la que las coordenadas de cada punto corresponden a una de las variables cuantitativas en estudio.

A continuación, registrarás distribuciones de dos características distintas de una misma población en una **nube de puntos** en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 1

Diferentes estudios en el área de la salud indican que existe una relación entre el índice de masa corporal (IMC) y las horas de sueño. En la tabla se muestra el registro de 10 personas.

Representa la información en un gráfico y determina si hay una relación entre estas variables.

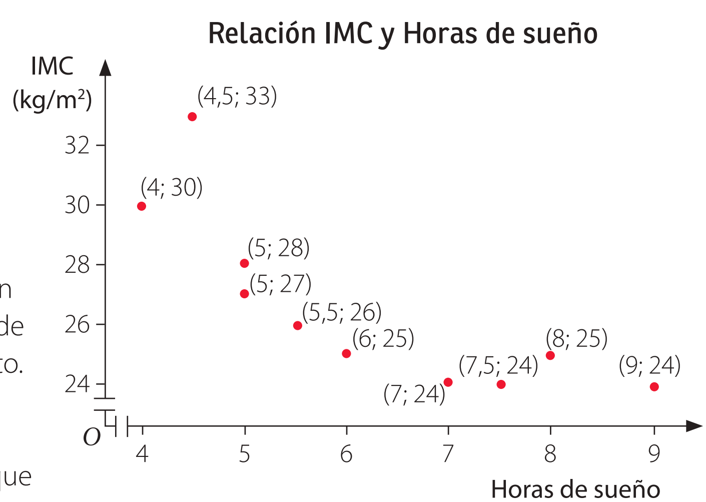
Relación IMC y horas de sueño										
Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IMC (kg/m²)	33	25	27	28	30	24	24	25	24	26
Horas de sueño	4,5	6	5	5	4	7,5	7	8	9	5,5

1. Identifica el tipo de variables.

   Las variables que se describen son cuantitativas, ya que son medidas cuantificables.

2. Representa la relación en un gráfico de nube de puntos.

   Cada persona es representada como un punto en el plano. Las coordenadas del punto están dadas por los valores de las variables. Si en el eje horizontal se representa la variable «Horas de sueño» y en el vertical, la variable «IMC», entonces, la persona 1 puede ser identificada por las coordenadas (4,5; 33), es decir, 4,5 puntos medidos de izquierda a derecha desde el origen y 33 puntos medidos de abajo hacia arriba desde el origen. Este proceso se repite para cada punto.



3. Responde.

   Se puede observar una posible asociación, ya que mientras menos horas de sueño se tienen, hay presencia de un mayor valor del IMC.

BDA U4_ACT_2

Correlación

Cuando una nube de puntos tiene una tendencia semejante a una recta o los puntos están en torno a una recta, se dice que las variables están **correlacionadas linealmente**.

- Dos variables se correlacionan de manera **positiva** si los valores de ambas aumentan o disminuyen simultáneamente.
- Dos variables se correlacionan de manera **negativa** cuando los valores de una variable aumentan y los de la otra disminuyen.
- Si en el gráfico se muestran algunos puntos con un comportamiento muy distinto al de los demás, se dice que son **puntos aislados** o **puntos atípicos**.

Ahora, trabajarás con un estudio estadístico en el que buscarás **relaciones lineales** entre las variables y analizarás los **puntos aislados** que se presentan en la información.

Ejemplo 2

Para estudiar la asociación entre la cantidad de calorías quemadas y la masa corporal (en kg), se realiza un estudio a 20 deportistas que deben correr 10 km. Se midieron las calorías quemadas con relojes inteligentes.

Los resultados se muestran en la tabla.

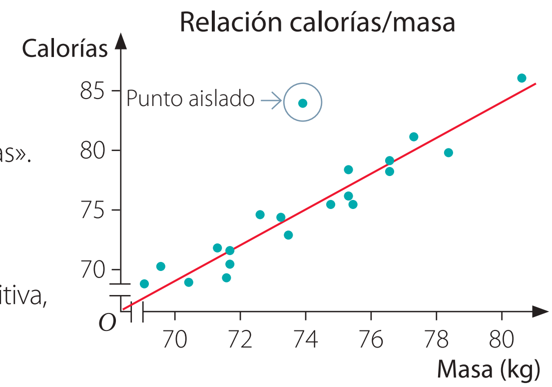
Relación calorías/masa		
Deportista	Masa (kg)	Calorías
1	75,5	78,2
2	71,7	71,8
3	72,7	75,1
4	78,7	79,4
5	76,8	78,8
6	75,5	76,4
7	73,3	74,9
8	68,5	68,9
9	74,0	82,5
10	75,6	76,2

Relación calorías/masa		
Deportista	Masa (kg)	Calorías
11	76,8	78,2
12	71,7	72,5
13	71,3	72,8
14	81,1	84,5
15	77,6	80,5
16	73,3	74,9
17	71,6	70,8
18	74,9	75,8
19	69,5	71,5
20	70,3	70,6

Representa los resultados en un gráfico de nube de puntos. ¿Hay puntos aislados? ¿Qué tipo de correlación existe entre las variables?

1. Representa los resultados en una nube de puntos.

   En el gráfico se representa en el eje horizontal la variable «Masa», mientras que, en el eje vertical, la variable «Calorías».



2. Responde.

   En la representación se puede observar que hay un punto aislado (74; 82,5). Además, una tendencia o correlación positiva, dado que al aumentar la masa, aumentan las calorías.

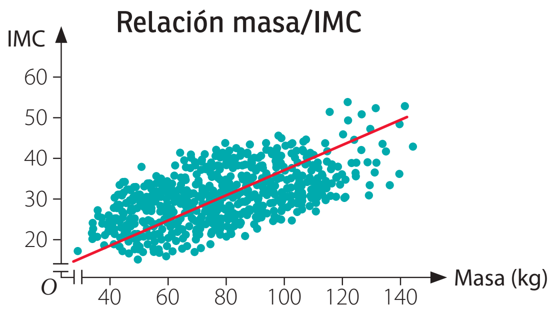
Correlación lineal nula

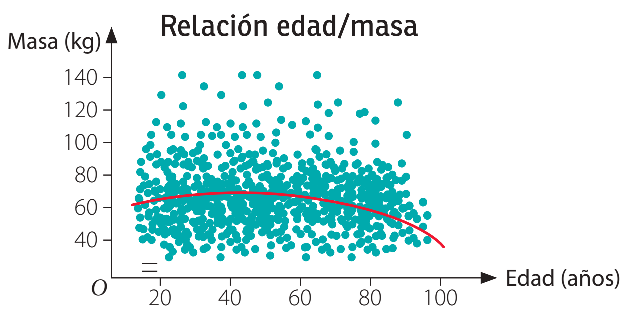
Dos variables tendrán una **correlación nula** si no es clara la relación entre las variables, es decir, no presentan una correlación positiva ni negativa. En estos casos, la nube de puntos que corresponde a la relación entre las variables no se puede representar con una línea recta.

A continuación, a partir de los datos estadísticos de un estudio identificarás **correlaciones lineales y nulas** a partir de la representación de los datos.

Ejemplo 3

En la encuesta nacional de salud (2016-2017) se registró la masa (kg), estatura (cm) y la edad (años) de las personas, junto con otras variables de interés asociadas a la salud.





¿Cuál de las siguientes gráficas representa una correlación no lineal?

1. Analiza cada gráfica.

   A partir de la masa y la estatura, se puede determinar el índice de masa corporal (IMC), el cual se obtiene mediante la razón entre la masa y el cuadrado de la estatura.

   Al graficar la relación entre la masa y el IMC, se observa una correlación lineal, como es de esperar dada la construcción del IMC, que depende de la masa.

   Por otro lado, si se grafica la relación entre la edad de las personas y su masa, se observa una relación que no es lineal, es más bien parecida a una curva, por lo tanto, la correlación lineal es casi nula.

2. Responde.

   La gráfica que representa la relación entre la edad y masa corresponde a una correlación no lineal.

Florence Nightingale
(1820 - 1910)

Como investigadora se encargó de recopilar datos sobre natalidad y mortalidad en distintos hospitales para realizar estudios estadísticos. Aprovechando sus conocimientos de matemáticas, analizó los datos de que disponía utilizando como metodología la estadística médica y el razonamiento inductivo. Este análisis tuvo como resultado una reducción de la tasa de las epidemias y de la mortalidad del 43 % al 2 % en los hospitales militares británicos y significó una mejora de la asistencia sanitaria tanto de forma cuantitativa como cualitativa. Al día de hoy, los estudios estadísticos de Florence Nightingale siguen siendo un recurso muy utilizado en las clínicas y hospitales para elaborar los diagnósticos médicos.

Fuente: Otras miradas. Aportaciones de las mujeres a las matemáticas (22 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_74

U4_ACT_3
BDA U4_AUD_1

Relación entre dos variables cualitativas

Una **tabla de doble entrada o tabla de contingencia** es aquella que sirve para contar la cantidad de individuos u objetos con dos tipos de características o variables cualitativas.

Una tabla de doble entrada está conformada por filas y columnas. Las filas están formadas por las categorías de una variable, y las columnas, por las de la otra variable. En cada una de las casillas formadas se ubica la cantidad de datos que tienen ambas características simultáneamente.

A continuación, registrarás distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una **tabla de doble entrada**.

Ejemplo 4

El estudio de *Western Collaborative Group Study* es una investigación en la cual se reclutaron hombres sanos y se les registraron sus características físicas como estatura, edad, talla, azúcar en sangre, entre otros. A estas personas se les estudió durante 8 años (tiempo de seguimiento) y al finalizar este tiempo se registró cuántos de ellos presentaron alguna enfermedad al corazón. El objetivo era conocer qué características de las personas, o hábitos, aumentan el riesgo de desarrollar enfermedad al corazón.
En la tabla de doble entrada se presenta un resumen de la relación entre dos variables cualitativas.

Una variable indica la aparición de enfermedad coronaria, mientras que la otra, el tipo de comportamiento de la persona. El comportamiento de tipo A, se caracteriza por una mayor agresividad y un impulso competitivo, preocupación por los plazos, impaciencia crónica y un sentido de urgencia del tiempo, en contraste con el patrón de comportamiento de tipo B, más relajado y menos apresurado. Compara riesgo de enfermedad coronaria en el grupo A, con riesgo de enfermedad coronaria en el grupo B e interpreta el resultado.

Investigación enfermedad coronaria

Enfermedad \ Tipo	Tipo de comportamiento	
	A	B
Presente	178	79
Ausente	1 411	1 486
Total	1 589	1 565

Fuente: National Library of Medicine, (22 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_75

1. Calcula el riesgo de enfermedad en cada grupo.

   El riesgo (R) es la frecuencia relativa de enfermedad coronaria en cada grupo, A y B.

   $$R_A = \frac{178}{1\,589} \approx 0{,}11 \qquad R_B = \frac{79}{1\,565} \approx 0{,}05$$

   Estas cantidades se pueden escribir como porcentajes, es decir, aproximadamente el 11 % de las personas con comportamiento A presentaron enfermedad coronaria, mientras que de las que tuvieron comportamiento B, solo el 5 %, aproximadamente.

2. Compara los riesgos.

   Para comparar dos cantidades se puede usar la diferencia o la razón, o sea, se pueden restar las cantidades o dividirlas. La diferencia nos indicará cuántos puntos porcentuales es mayor una que la otra, mientras que el cociente nos dirá cuánto más grandes es una que la otra. En el área de la salud, comparar por cociente es lo más habitual, y la comparación de riesgos se conoce como riesgo relativo (RR).

   Diferencia ▶ $R_A - R_B = 0{,}11 - 0{,}05 = 0{,}06$ Razón ▶ $RR = \dfrac{R_A}{R_B} = \dfrac{0{,}11}{0{,}05} = 2{,}2$

3. Interpreta los resultados.

   El riesgo en el grupo de personas con comportamiento A es mayor en 6 puntos porcentuales que en el grupo con comportamiento B. Por otro lado, el riesgo relativo nos indica que el riesgo de tener una enfermedad coronaria es más del doble en el grupo con comportamiento A que en el con comportamiento B.

Relación entre una variable cuantitativa y una cualitativa

La relación entre una **variable cuantitativa** y una **cualitativa** es común representarla mediante **gráficos de caja y bigotes** para mostrar cómo se distribuye la variable cuantitativa en cada categoría de la variable cualitativa.

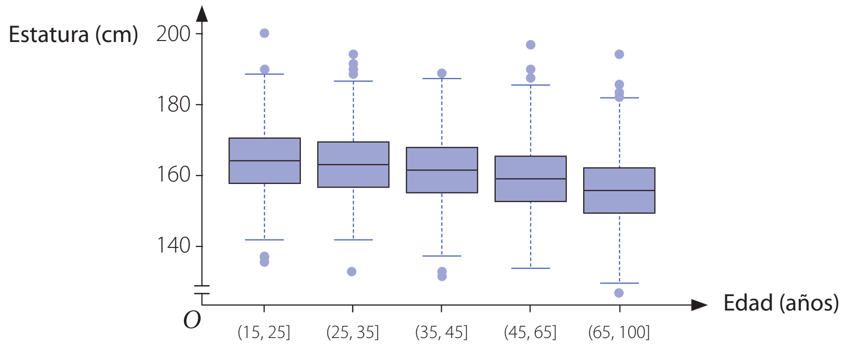
Para analizar de manera cuantitativa esta relación, se pueden comparar la mediana, la media y otras medidas de posición de la variable cuantitativa en cada categoría de la variable cualitativa.

Ahora, analizarás la relación entre las variables cuantitativas de un estudio, utilizando **gráficos de caja y bigotes** y comparando las **medidas de posición**.

Ejemplo 5

Para analizar el crecimiento normal de las personas, se registra la estatura de la población chilena (hombres y mujeres) en distintos rangos etarios. El gráfico muestra la distribución de la estatura por intervalos de edad. Interpreta el gráfico.

Distribución de la estatura por intervalos de edad



1. Identifica las variables que se representan.

   En el eje horizontal se representa la edad categorizada en 5 grupos. Los intervalos de edad cubren 10 años, empezando desde 15, aunque el penúltimo intervalo cubre 20 años y el último intervalo de edad va desde los 65 a los 100 años. El eje vertical representa la estatura medida en centímetros.

2. Identifica el tipo de gráfico.

   La estatura es una variable cuantitativa, por lo que se puede representar mediante un gráfico de caja y bigotes. La línea central de la caja representa a la mediana, mientras que los extremos de la caja, al primer y tercer cuartil. Los bigotes corresponden al rango intercuartílico. Los puntos fuera de los bigotes se conocen como puntos atípicos.

3. Interpreta el gráfico.

   Se puede observar que las medidas centrales, mediana y cuartiles, van disminuyendo al avanzar la edad. En particular, la mediana al comienzo era por sobre 160 cm, pero en el grupo de personas mayores de 65 años, la mediana está bajo esa medida. Eso quiere decir que el 50 % de las personas mide menos que esa medida. Los extremos superiores al rango intercuartil son similares en casi todos los rangos de edad, excepto en el último y se pueden observar valores atípicos en cada rango, es decir, personas muy altas o personas muy bajas de estatura. En conclusión, se podría decir que la estatura tiende a disminuir al pasar del tiempo.

- ¿Qué otras variables crees que pueden seguir el mismo comportamiento al pasar los años? Explica.
- ¿Crees que si se separa el análisis entre hombres y mujeres, los resultados sean distintos? Justifica.

BDA U4_ACT_4 a 7

Comparación de dos poblaciones

La tierra cumple un rol esencial en los sistemas climáticos, sirviendo de medio para la mayoría de los ciclos naturales al intercambiar energía, nutrientes, agua y aerosoles entre la atmósfera y el suelo (FAO, 2015c). A este nivel, se consideran los usos que se le dan a la tierra, como terrenos agrícolas, bosques, glaciares (reservas de agua dulce), áreas urbanas, entre otros.

Fuente: Medio Ambiente Informe Anual 2023. (22 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_76

El Parque Nacional Conguillío está ubicado en la Región de La Araucanía, en las comunas de Curacautín, Lonquimay (provincia de Malleco), Vilcún, Cunco y Melipeuco (provincia de Cautín).

Fuente: Conaf, (22 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_77

Los ecosistemas terrestres son vitales para el sostenimiento de la vida humana, ya que contribuyen con más de la mitad del PIB (Producto Interno Bruto) mundial e incluyen diversos valores culturales, espirituales y económicos. Los bosques templados de nuestro país se caracterizan por ser uno de los pocos grandes remanentes del mundo que están aún relativamente inalterados. Tanto es así, que Chile posee casi un tercio de este tipo de bosques, lo que, dicho de otra manera, significa que en nuestro territorio encontramos prácticamente cada tipo de bosque templado propio del hemisferio sur.

- ¿Qué entiendes por ecosistema? Explica.
- ¿Qué parque conoces? Comenta con tu curso.
- Si quieres comparar diferentes tipos de bosques, ¿en qué te fijarías?, ¿por qué?

Para conocer características de los bosques nativos, ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_78*

Comparación de dos poblaciones

Muchos estudios estadísticos tienen por objetivo ser una base en la **toma de decisiones**, por lo que deben ser rigurosos y críticos. Para llevar a cabo la toma de decisiones es importante **comparar** los datos obtenidos utilizando diversas representaciones.

A continuación, **compararás poblaciones** a partir de la información representada en una tabla de contingencia.

Ejemplo 1 Educación ambiental

La clasificación de los bosques nativos se basa en su estructura de acuerdo con la fisonomía (estructura de la población) de ellos. La estructura depende, básicamente, del origen de la población, de la combinación de edades y de las características ambientales del sitio. A continuación se presentan algunas:

- Bosque adulto: corresponde a un bosque primario, o sea, en el que los árboles se han originado a partir del ciclo reproductivo normal del bosque. Son en general bosques heterogéneos en cuanto a tamaño de copas, altura de los árboles, diámetros de los troncos y edades, que se desarrollan en sitios sin severas limitaciones ambientales. Son siempre bosques con alturas mayores de 8 m.
- Renoval: corresponde a un bosque secundario, o sea, originado después de una catástrofe, ya sea natural o antrópica (ej. incendio, tala rasa, derrumbe, erupción volcánica, etc.), por medio de semillas y reproducción vegetativa. Los renovales son en general bosques coetáneos (los árboles son de una misma clase de edad), homogéneos en cuanto a la altura de los árboles y diámetros de los troncos.

En la tabla se muestra la superficie de bosque nativo (Bosque adulto y Renoval), según estructura 2018-2022

Superficie bosque nativo

Estructura	Superficie (ha)				
	2018	2019	2020	2021	2022
Bosque adulto	6 134 661	6 134 661	5 786 104	5 873 120	5 872 270
Renoval	1 080 796	1 080 796	1 732 793	1 738 859	1 719 288

Fuente: Catastro de los Recursos Vegetacionales Nativos de Chile de la Corporación Nacional Forestal (Conaf). (22 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_76

Al comparar el «Bosque adulto» con el «Renoval», ¿qué conclusión se puede deducir?

1. Identifica las variables.

   Se representan el «Bosque adulto» y el «Renoval», además de la superficie en hectáreas (ha) desde el año 2018 hasta el año 2022.

2. Compara.

   Al revisar la superficie del «Bosque adulto», se observa que esta tiende a la baja, ya que comienza el año 2018 con 6 134 661 ha y al año 2022 tiene 5 872 270. En cambio, la superficie del «Renoval» tiende al alza, ya que comienza el año 2018 con 1 080 796 ha y al año 2022 tiene 1 719 288. Sin embargo, del año 2021 al 2022 experimentó una baja. Al compararlas, de la tabla se deduce que el «Bosque adulto» tiene más hectáreas que el «Renoval», y que además el «Bosque adulto» tiende a la baja y el «Renoval» no.

3. Responde.

   Una conclusión que se puede deducir es que el «Bosque adulto» tiene más hectáreas que el «Renoval», y que el «Bosque adulto» tiende a la baja y el «Renoval» no.

- ¿Qué diferencia al «Bosque adulto» del «Renoval»? Comenta con tu curso.

BDA U4_ACT_8

Asociación entre variables cuantitativas en dos poblaciones

Una **nube de puntos** permite efectuar **comparaciones entre dos poblaciones** cuando se relacionan dos variables cuantitativas. Para esto, basta con representar los datos de ambas poblaciones en el mismo gráfico, con distintos colores para diferenciarlas, y con la misma escala.

Ahora **compararás poblaciones** a partir de la información representada en una nube de puntos.

Ejemplo 2

De una población se extrae una muestra de 12 hombres y 12 mujeres, a quienes se les preguntó la edad y se les midió el IMC (índice de masa corporal). Los datos se registraron en las siguientes tablas:

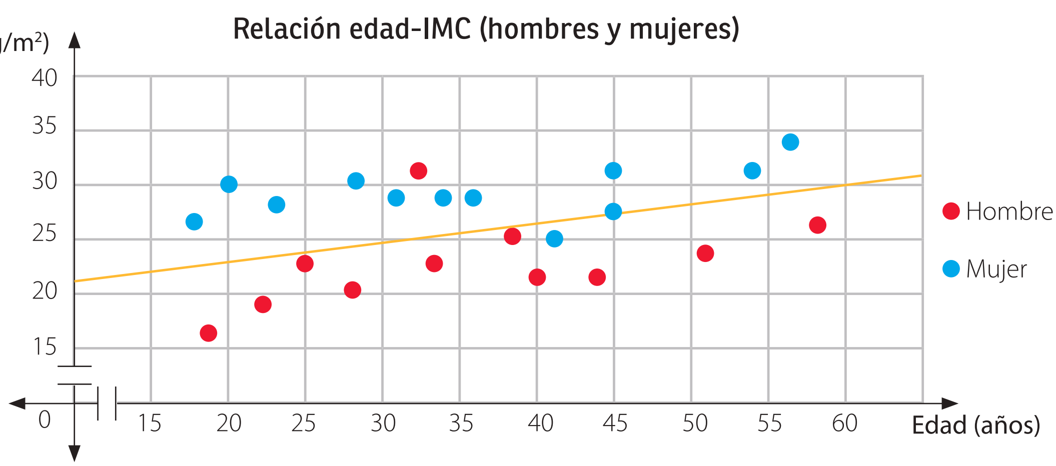
Relación edad-IMC en mujeres												
Edad (años)	34	45	18	23	29	36	57	20	45	31	54	41
IMC (kg/m^2)	29	31	27	28	30	29	34	30	27	29	31	25

Relación edad-IMC en hombres												
Edad (años)	22	39	25	40	28	32	51	33	44	19	58	51
IMC (kg/m^2)	19	25	22	21	20	31	24	22	21	16	26	24

Construye la nube de puntos con los datos. ¿Existe correlación?

1. Representa la nube de puntos y traza una recta.

   La nube de puntos queda como se muestra a continuación. Puedes trazar una recta de forma intuitiva que separe ambas nubes de puntos para compararlas.



2. Responde.

   En este caso, se observa que el IMC de las mujeres de la muestra es, en general, mayor que el de los hombres para las mismas edades. Se concluye que existe correlación lineal.

- ¿Es correcto afirmar que la nube de puntos de los hombres tiene un punto aislado? Explica.

Asociación entre variables cualitativas en dos poblaciones

Una manera de evaluar la asociación entre dos variables cualitativas en dos poblaciones es **comparar las frecuencias de las tablas de contingencia** en las dos poblaciones.

Las tablas de contingencia se pueden representar por gráficos de barras apiladas.

Ahora, continuarás **comparando poblaciones** a partir de los datos representados en una tabla de contingencia y el cálculo de la razón de riesgos.

Ejemplo 3

Continuando con el estudio de *Western Collaborative Group Study*, podría ser de interés analizar si el riesgo de una enfermedad coronaria cuando se tiene un comportamiento A es distinto en el grupo de hombres con menos de 45 años respecto de los que tienen más de 45 años. Anteriormente se representó la información en una sola tabla de contingencia. Ahora la población está dividida en dos grupos, los mayores de 45 y los menores. Los resultados se muestran a continuación:

Comportamiento de enfermedad coronaria en...				
Tipo / Enfermedad	menores de 45 años		mayores de 45 años	
	A	B	A	B
No	703	845	708	641
Sí	54	32	124	47
Total	757	877	832	688

¿Cómo es el riesgo en cada población?

1. Calcula el riesgo en cada caso.

   El riesgo se calcula con la frecuencia relativa en cada grupo.

Comportamiento de enfermedad coronaria en...				
Tipo / Enfermedad	menores de 45 años		mayores de 45 años	
	A	B	A	B
No	$\frac{703}{757} \approx 0{,}93$	$\frac{845}{877} \approx 0{,}96$	$\frac{708}{832} \approx 0{,}85$	$\frac{641}{688} \approx 0{,}93$
Sí	$\frac{54}{757} \approx 0{,}07$	$\frac{32}{877} \approx 0{,}04$	$\frac{124}{832} \approx 0{,}15$	$\frac{47}{688} \approx 0{,}07$

2. Calcula la razón de riesgo en cada grupo.

   Menores de 45 años:

   $$RR_{(\text{menores de 45})} = \frac{R_A}{R_B} \approx \frac{0{,}07}{0{,}04} = 1{,}75$$

   Mayores de 45 años:

   $$RR_{(\text{mayores de 45})} = \frac{R_A}{R_B} \approx \frac{0{,}15}{0{,}07} \approx 2{,}14$$

3. Concluye.

   Se puede interpretar que el comportamiento A aumenta el riesgo de enfermedad coronaria respecto a las personas con comportamiento B, pero este aumento del riesgo es mayor si se tiene más de 45 años comparado con los menores de 45 años, es decir, el aumento de edad incrementó el efecto del comportamiento A sobre la presencia de enfermedad coronaria.

BDA U4_ACT_9

Ejemplo 4 » Análisis del colesterol en **Pueblos Originarios**

La alimentación mapuche se basa principalmente en productos agrícolas como el trigo, papas, arvejas, habas, ajos, cebollas, ají y maíz; en la recolección de hierbas como las nalcas, el yuyo o el nabo, o de hongos como los digüeñes que crecen en los robles.

El artículo *«Genetic epidemiology of cholesterol cholelithiasis among Chilean Hispanics, Amerindians, and Maoris»* muestra evidencia de que las poblaciones amerindias tienen un perfil de colesterol plasmático que difiere de poblaciones caucásicas o mestizas, con menores niveles de colesterol-total, colesterol-LDL y mayores niveles de colesterol-HDL.

Utilizando datos de la encuesta nacional de salud y una submuestra de personas que se declaran no pertenecer a ningún pueblo indígena, se obtuvo lo siguiente:

Estudio de colesterol por zona y por ascendencia

Zona	Zona urbana		Zona rural	
Ascendencia / Tipo de colesterol	No pertenece a Pueblo Originario	Ascendencia mapuche	No pertenece a Pueblo Originario	Ascendencia mapuche
Colesterol normal (mg/dL)	191	149	26	60
Colesterol alto (mg/dL)	57	41	10	12
Total	**248**	**190**	**36**	**72**

La muestra da cuenta de la cantidad de personas que poseen un colesterol-LDL mayor a 130 mg/dL en zonas urbanas y rurales, de ascendencia mapuche y personas que declaran no poseer ascendencia indígena.

Fuentes: National Library of Medicini,(22 de mayo) http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_79
Ministerio de Salud, (22 de mayo) http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_80

Compara el riesgo de tener colesterol alto si se tiene ascendencia mapuche y también el riesgo en zonas urbanas y rurales.

1. Calcula el riesgo en cada caso.

   Para calcular el riesgo, basta dividir la frecuencia de cada categoría por su respectivo total.

Estudio de colesterol por zona y por ascendencia

Zona	Zona urbana		Zona rural	
Ascendencia / Tipo de colesterol	No pertenece a Pueblo Originario	Ascendencia mapuche	No pertenece a Pueblo Originario	Ascendencia mapuche
Colesterol normal (mg/dL)	$\frac{191}{248} \approx 0{,}77$	$\frac{149}{190} \approx 0{,}78$	$\frac{26}{36} \approx 0{,}72$	$\frac{60}{72} \approx 0{,}83$
Colesterol alto (mg/dL)	$\frac{57}{248} \approx 0{,}23$	$\frac{41}{190} \approx 0{,}22$	$\frac{10}{36} \approx 0{,}28$	$\frac{12}{72} \approx 0{,}17$

2. Compara los riesgos mediante riesgos relativos (RR) del colesterol alto.

   Al calcular los riesgos relativos y compararlos se obtiene que:

$$RR_{\text{urbano}} \approx \frac{0{,}22}{0{,}23} \approx 0{,}96 \qquad RR_{\text{rural}} \approx \frac{0{,}17}{0{,}28} \approx 0{,}61$$

3. Interpreta el resultado.

   El riesgo de tener colesterol alto es menor en las personas con ascendencia mapuche tanto en la zona urbana como en la rural, sin embargo, en la zona rural, esta disminución es mayor.

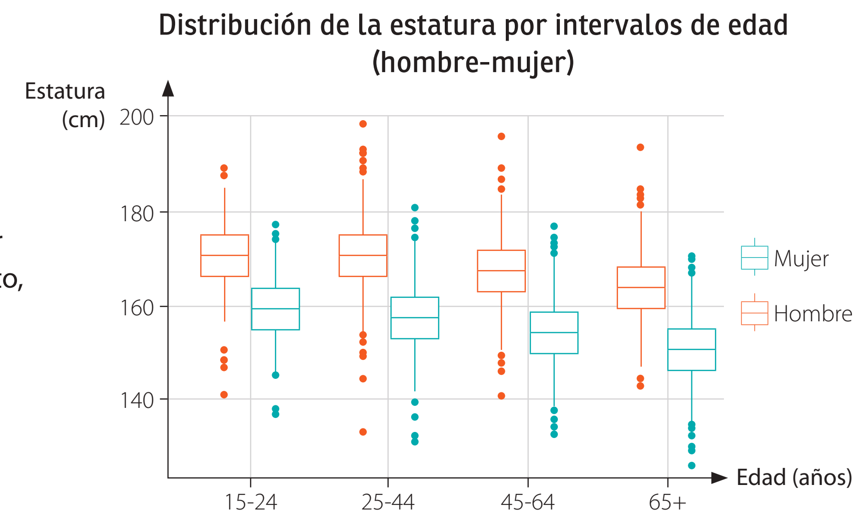
Asociación entre una variable cuantitativa y una cualitativa en dos poblaciones

Para **comparar** la relación entre una variable cuantitativa y una cualitativa en dos grupos, se pueden utilizar los **gráficos de caja y bigotes** separando la distribución de la variable cuantitativa en cada uno de los grupos.

A continuación, **compararás poblaciones** a partir de los datos representados en gráficos de caja y bigotes.

Ejemplo 5

Anteriormente se vio que la estatura tiende a disminuir a medida que pasan los años. Ahora podemos analizar si este comportamiento es similar en hombres y mujeres. Para esto, revisarás el gráfico de caja y bigotes separado por hombre y mujer. Analiza el gráfico e interprétalo.



1. Identifica las variables.

   En el eje horizontal se muestran los grupos de edad, mientras que en el eje vertical se describe la estatura. Los colores indican la variable que da cuenta de las poblaciones que se compararán; en este caso, hombres y mujeres.

2. Interpreta el gráfico.

   Respecto a la tendencia, tanto hombres como mujeres tienen una tendencia a disminuir la estatura conforme aumenta la edad. Por otro lado, al comparar hombres y mujeres, se nota que la distribución de la estatura en mujeres es casi completamente menor a la mediana de la estatura de los hombres, lo que quiere decir que, en Chile, en su mayoría los hombres miden más que las mujeres. Los puntos extremos muestran que hay hombres que miden menos que algunas mujeres en los distintos grupos de edad.

Para finalizar la **Lección 1**...

- ¿Comprendiste las representaciones que se utilizaron acordes al contenido?, ¿por qué?
- ¿Analizaste e inferiste información representada en tablas y gráficos? Explica.
- ¿Mostraste una actitud crítica al evaluar la información tratada? ¿Por qué lo crees?
- ¿Valoraste el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social? Justifica.
- ¿Reconoces que el uso de los contenidos estudiados se aplica en diferentes situaciones?
- ¿En qué te basas para responder lo anterior?

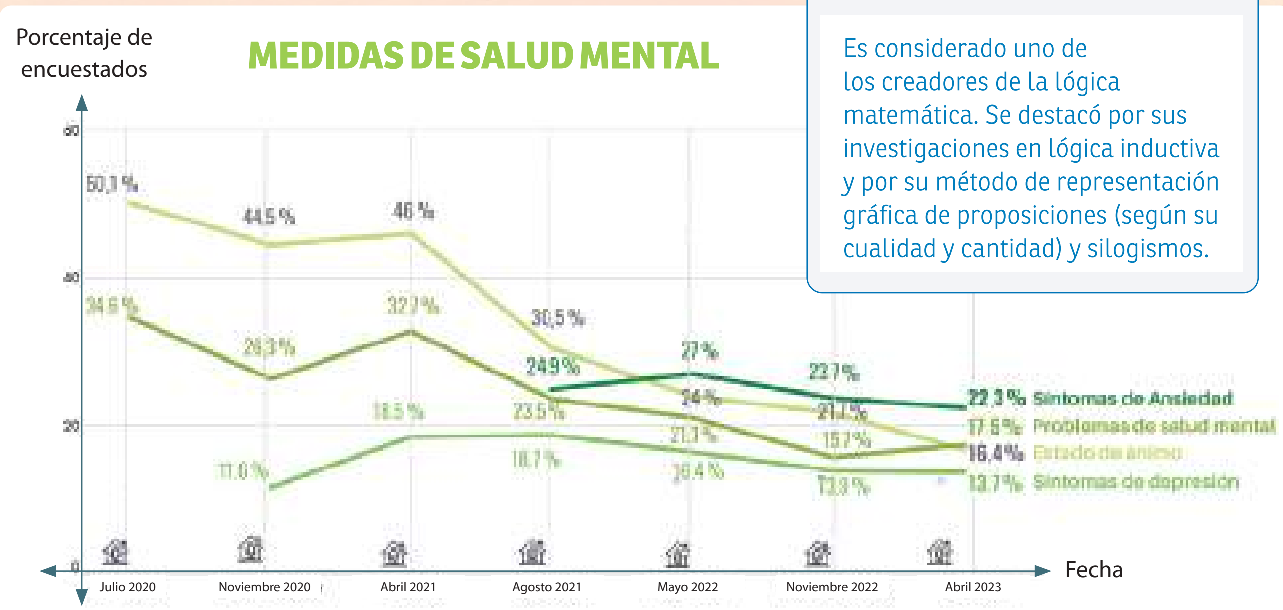
BDA U4_ACT_10 a 13
U4_IMA_1

Lección 2

Reglas de la probabilidad

John Venn
(1834 - 1923)

Es considerado uno de los creadores de la lógica matemática. Se destacó por sus investigaciones en lógica inductiva y por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos.



Unión e intersección de eventos

La salud mental es un tema muy importante y cada vez se prioriza más en las personas. El Termómetro de la Salud Mental es un estudio colaborativo entre la Asociación Chilena de Seguridad (ACHS) y el Centro UC de Encuestas y Estudios Longitudinales, que a partir de una muestra representativa de la población nacional reportan de manera periódica la situación de salud mental, miden su evolución en el tiempo y profundizan en sus factores asociados.

Dentro de las variables en estudio están los síntomas de ansiedad, los problemas de salud mental, el estado de ánimo y los síntomas de depresión. Algunos de los resultados se muestran en la imagen y el gráfico.

Fuente: ACHS (15 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_81

En el sitio *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_82* puedes encontrar recursos, ayuda u orientación relacionada con la salud mental.

- ¿Cómo crees que influye la salud mental en las personas?
- Al observar el gráfico, ¿qué puedes concluir? Comparte tu respuesta con tu curso.
- A partir de los resultados del estudio, ¿cómo determinarías la probabilidad de elegir a una persona que manifieste síntomas de depresión?
- Según la información del estudio, crea una pregunta sobre probabilidades y plantéasela a tu curso.
- Si una persona afirma sufrir dos de las medidas de salud mental del estudio, ¿qué estrategia usarías para determinar todas las maneras de cumplir 2 de las 4 medidas?

¡Tu salud mental es primordial y debes cuidarla! Pide ayuda si la necesitas.

Unión de eventos

Dados dos eventos A y B, se define el **evento unión de** A y B como aquel en el que cada elemento pertenece a A o pertenece a B, es decir, a uno de los dos eventos o a ambos. Simbólicamente se denota por $A \cup B$.

- evento: resultado de un experimento aleatorio.
- $\cup$: unión.

A continuación, determinarás y representarás la **unión de eventos** de un experimento aleatorio en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 1

A un grupo de 6 personas seleccionadas se les realizará un examen de rutina por si poseen uno de los tres factores de riesgo posibles. Estos son «ser persona obesa», «tener la presión alta», «circunferencia de cintura (CC) alta». La tabla muestra si las personas cumplen, o no, los factores para el examen.

Factores de riesgos			
Paciente	Obesidad	Presión alta	CC alta
Daniel	Sí	Sí	Sí
Nidia	No	Sí	Sí
Gabriel	No	No	Sí
Andrea	Sí	Sí	No
Alejandro	Sí	No	No
Beatriz	No	No	No

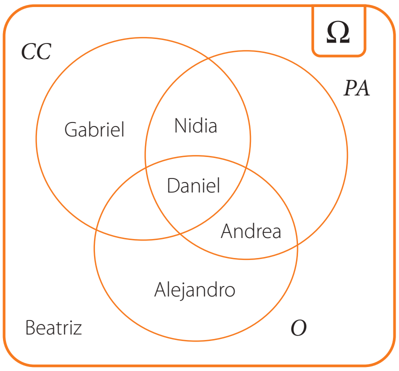
- Representa los eventos en un diagrama.
- Determina cuál es la probabilidad de elegir a alguien que cumpla con algún factor de riesgo.

1. Representa los eventos en un diagrama de Venn.

   La presencia o ausencia de un factor puede ser catalogada como un resultado aleatorio, por lo tanto, un evento.

   Los eventos se pueden representar con un diagrama de Venn.

   Los tres eventos son «CC alta», «Presión alta (PA)» y «Obesidad (O)».



2. Al observar el diagrama, Gabriel, Nidia, Daniel, Alejandro y Andrea cumplen alguno de los tres factores. Es decir, $CC \cup PA \cup O = \{$Gabriel, Nidia, Daniel, Alejandro, Andrea$\}$.

   Beatriz es la única que no cumple alguno de ellos.

3. Aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la unión. En este experimento sus resultados tienen igual probabilidad de ocurrir (equiprobables) y el espacio muestral es finito.

$$P(CC \cup PA \cup O) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{\#(CC \cup PA \cup O)}{\#\Omega} = \frac{5}{6}$$

4. Responde.

   La probabilidad de elegir a alguien que cumpla algún factor es $\frac{5}{6}$.

- Ω: espacio muestral, conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- $\#B$: cantidad de elementos de un conjunto B.
- Al interpretar problemas, hay que considerar que la unión de eventos está asociada a la disyunción «o».

- ¿Cómo crees que facilita el cálculo de probabilidades el uso de un diagrama de Venn? Comenta con tu curso.

BDA U4_ACT_14

Intersección de eventos

Dados dos eventos A y B, se define el **evento intersección de** A y B como aquel en que cada uno de sus elementos pertenece a A y pertenece a B, es decir, todos los elementos comunes de A y B. Simbólicamente se denota por $A \cap B$.

- $\cap$: intersección.

Ahora, determinarás y representarás la **intersección de eventos** de un experimento aleatorio en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 2

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), la salud es un estado de completo bienestar físico, mental y social, y no solamente la ausencia de afecciones o enfermedades.

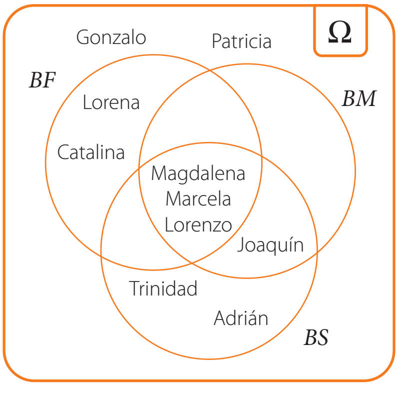
Fuente: OMS (15 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_83*

Esta acción está en concordancia con el Objetivo de Desarrollo Sostenible **ODS 3 Salud y bienestar**, desarrollado por la Organización de Naciones Unidas (ONU) para garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades. En este contexto, se hace una encuesta a 10 personas y se les preguntó si han alcanzado su bienestar físico, mental y social. La siguiente tabla muestra sus respuestas:

Bienestar físico, mental y social			
Encuestado 1	**Bienestar físico**	**Bienestar mental**	**Bienestar social**
Lorena	Sí	No	No
Marcela	Sí	Sí	Sí
Joaquín	No	Sí	Sí
Lorenzo	Sí	Sí	Sí
Magdalena	Sí	Sí	Sí

Bienestar físico, mental y social			
Encuestado 2	**Bienestar físico**	**Bienestar mental**	**Bienestar social**
Catalina	Sí	No	No
Patricia	No	No	No
Adrián	No	No	Sí
Gonzalo	No	No	No
Trinidad	No	No	Sí

- **Representa los eventos en un diagrama de Venn.**
- **Determina la probabilidad de elegir al azar una persona saludable.**



1. Representa los eventos en un diagrama de Venn.

   Para ello, debes separar los tres eventos posibles, es decir, «Bienestar Físico (BF)», «Bienestar Mental (BM)», «Bienestar Social (BS)».

2. Identifica la intersección de los eventos.

   $$BF \cap BM \cap BS = \{\text{Magdalena, Marcela, Lorenzo}\}$$

3. Interpreta la intersección de los eventos.

   La intersección de los tres eventos se interpreta como el cumplimiento de las tres condiciones, por ende, las condiciones para considerar a una persona saludable.

4. Aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la intersección.

   $$P(BF \cap BM \cap BS) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{\#(BF \cap BM \cap BS)}{\#\Omega} = \frac{3}{10}$$

5. Responde.

   La probabilidad de elegir al azar una persona saludable es $\frac{3}{10}$.

Al interpretar problemas, hay que considerar que la intersección de eventos se asocia con la conjunción «y».

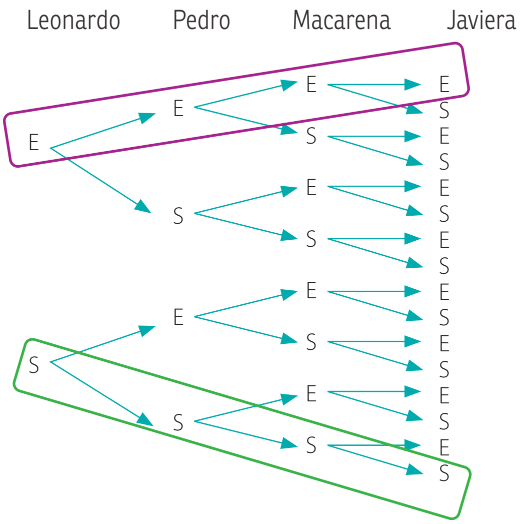
Ejemplo 3

En salud pública es de interés determinar cuántas personas pueden estar padeciendo alguna enfermedad. Tener una se podría considerar como un resultado aleatorio, es decir, una persona puede tener o no una enfermedad, pero este resultado es incierto. En una población podrían estar todos enfermos, así como también ninguno podría estarlo y eso dependerá de qué tan probable sea tener la enfermedad.

Determina los resultados que podrían darse entre cuatro personas, Leonardo, Pedro, Macarena y Javiera, y cómo se relacionan con la unión e intersección de eventos.

1. Representa los resultados en un diagrama de árbol.

Cada persona puede tener dos posibles resultados, estar enfermo (E) o sano (S). Entonces, el diagrama que representa los resultados posibles es el siguiente:



2. Comprende la representación.

El diagrama de árbol nos permite observar todos los posibles resultados para estas cuatro personas. Por ejemplo, la primera rama indica el evento «Leonardo, Pedro, Macarena y Javiera están enfermos», mientras que la última rama, la inferior, representa que todos están sanos. Cada rama se relaciona con la intersección, ya que debe ocurrir cada uno de los resultados, por lo que se usa la conjunción «**y**».

3. Interpreta un resultado.

El diagrama indica la cantidad de enfermos en la población. Por ejemplo, puedes ver de cuántas maneras podría haber 3 enfermos. En el diagrama, 3 enfermos implican tres posibles eventos:

{«Leonardo enfermo» **y** «Pedro enfermo» **y** «Macarena enferma» **y** «Javiera sana»} **o**,

{«Leonardo enfermo» **y** «Pedro enfermo» **y** «Macarena sana» **y** «Javiera enferma»} **o**,

{«Leonardo enfermo» **y** «Pedro sano» **y** «Macarena enferma» **y** «Javiera enferma»} **o**,

{«Leonardo sano» **y** «Pedro enfermo» **y** «Macarena enferma» **y** «Javiera enferma»}.

Las «**y**» están asociadas a la **intersección**, mientras que las «**o**» lo están a la **unión**.

- En el diagrama puedes observar que la cantidad de enfermos puede variar entre 0 y 4. Usa el diagrama para determinar de cuántas maneras posibles se pueden observar 0 enfermos, 1 enfermo, 2 enfermos y 4 enfermos.
- Si cada resultado posible tiene la misma probabilidad, ¿cómo determinarías la probabilidad de que haya 2 enfermos y 2 sanos en la población?
- Piensa en qué otra situación se podría usar un diagrama de árbol.
- ¿Qué condición crees que se debe cumplir para que la unión y la intersección de dos conjuntos den el mismo resultado?
- ¿Qué evento tiene más elementos, la unión o la intersección? ¿Siempre se cumple una de estas relaciones? Justifica tu respuesta.

BDA U4_ACT_15 a 18

Regla aditiva de la probabilidad

Redes sociales usadas por los estudiantes

		Facebook	X	YouTube	Instagram	WhatsApp	TikTok	Total
Género	Mujer	35	51	92	112	116	128	534
	Hombre	41	35	80	96	102	112	466
	Total	76	86	172	208	218	240	1 000

Las redes sociales forman parte de la vida cotidiana de muchos adolescentes. A pesar de que estar conectado a Internet tiene muchas ventajas, también deben enfrentarse a los riesgos que conlleva y que pueden afectar su bienestar. Por ejemplo, cuando desplaza actividades que son esenciales para un desarrollo saludable como dormir lo suficiente, mantenerse físicamente activo, concentrarse en las tareas escolares, relacionarse con amigos en persona o colaborar en la casa o en la comunidad. Otro riesgo importante es que también en ellas se puede propiciar el ciberbullying y el ciberacoso.

Fuente: Unicef (15 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_84

En el sitio *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_85* puedes encontrar una guía práctica para prevenir el ciberacoso.

Un colegio quiere conocer la red social usada con mayor frecuencia por parte de sus estudiantes. Para esto, realiza una encuesta y presenta los datos obtenidos en la tabla que se muestra en la imagen.

- Si presencias comportamientos de acoso escolar en redes sociales, ¿cuál de las siguientes actitudes adoptas? Explica.
  - Permaneces indiferente.
  - Haces algún comentario.
  - Señalas que esto no es apropiado ni en esta plataforma ni en ningún otro sitio.
  - Informas lo ocurrido a un adulto responsable.
- Si se plantea la pregunta anterior a uno de los encuestados, ¿cómo calcularías la probabilidad de que sea mujer y su red social de mayor uso sea WhatsApp?

Regla aditiva de la probabilidad

Dos eventos son **disjuntos** si no tienen elementos en común, es decir, no pueden ocurrir de manera simultánea, entonces, la **intersección** entre los eventos es **vacía**.

- $\varnothing$: conjunto vacío.

Si los eventos son **disjuntos**, entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La probabilidad del evento que no tiene elementos (vacío) es cero, es decir, $P(\varnothing) = 0$.

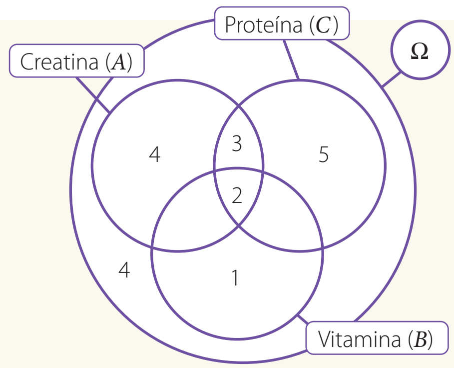
En general, la **probabilidad de la unión de eventos** se calcula como: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

A continuación, verás la relación entre eventos que tienen elementos en común y la **probabilidad de la unión**, y la aplicarás en la resolución de problemas.

Ejemplo 1 Conecta con **Educación Física y Salud**

Como has visto en la asignatura de **Educación Física y Salud**, muchos deportistas para poder mejorar su rendimiento consumen suplementos alimenticios de vitaminas, creatina y proteínas. Algunos no lo hacen. En el diagrama de Venn se representa cómo se distribuye la cantidad de deportistas de un gimnasio según el consumo de suplementos.

Si un deportista es escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que consuma creatina o proteínas? Además, muestra que se cumple la regla aditiva de la probabilidad.



1. Identifica los eventos involucrados. En este caso son los siguientes:
   - A: La persona consume creatina.
   - B: La persona consume vitaminas.
   - C: La persona consume proteínas.
   - D: La persona no consume suplementos.
   - $A \cap C$: La persona consume creatina y proteína.
   - $A \cup C$: La persona consume creatina o proteína.
2. Comprende el problema.

   Se pide calcular la probabilidad de que una persona consuma creatina o proteínas. Esto significa que se debe calcular $P(A \cup C)$.
3. Aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad de los eventos.

$$\#\Omega = 4 + 3 + 2 + 1 + 5 + 4 = 19$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4+3+2}{19} = \frac{9}{19} \quad P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2+1}{19} = \frac{3}{19} \quad P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{5+3+2}{19} = \frac{10}{19} \quad P(D) = \frac{\#D}{\#\Omega} = \frac{4}{19}$$

4. Usa el evento de interés, $A \cup C$, para probar que se cumple la regla aditiva y calcular la probabilidad pedida. Aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad de que una persona consuma:

$$\text{creatina o proteínas} \blacktriangleright P(A \cup C) = \frac{9}{19} + \frac{10}{19} - \frac{5}{19} = \frac{14}{19}$$

5. Responde.

   La probabilidad de que un deportista consuma creatina o proteínas es $\frac{14}{19}$.

- Si se quiere calcular la probabilidad de la unión de tres eventos, ¿cómo crees que sería la fórmula en el caso de que sean eventos disjuntos y en el caso de que no lo sean?

BDA U4_ACT_19

Ejemplo 2

En un colegio se quiere realizar un estudio sobre el *bullying* en enseñanza media. El colegio tiene un curso por nivel y la cantidad de estudiantes de cada curso se muestra en la tabla.

Cantidad de estudiantes por nivel				
Nivel	1.° medio	2.° medio	3.° medio	4.° medio
Cantidad de estudiantes	32	40	37	33

Se selecciona al azar a un estudiante entre los 4 niveles. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 1.° o 2.° medio?

1. Identifica los eventos aleatorios.

   El experimento aleatorio consiste en escoger a una persona al azar entre los cursos. Los eventos de interés son los siguientes:

   - A: El estudiante elegido es de 1.° medio.
   - B: El estudiante elegido es de 2.° medio.
   - $A \cup B$: El estudiante elegido es de 1.° o 2.° medio.

   Los eventos A y B son disjuntos porque ningún estudiante puede estar en dos cursos al mismo tiempo.

2. Calcula la probabilidad de cada evento.

   Si se asume que cada estudiante tiene la misma probabilidad de ser seleccionado, para calcular la probabilidad de cada evento se puede usar la regla de Laplace.

   $$\#\Omega = 32 + 40 + 37 + 33 = 142$$ ▶ En total hay 142 estudiantes.

   Entonces: $P(A) = \dfrac{32}{142}$ $\qquad P(B) = \dfrac{40}{142}$

   La probabilidad de la unión corresponde a la cantidad de estudiantes de 1.° y 2.° medio sobre el total.

   $$P(A \cup B) = \frac{72}{142} \approx 0{,}51$$

3. Responde.

   La probabilidad de elegir a un estudiante de 1.° o de 2.° medio es, aproximadamente, 0,51 o 51 %.

Ejemplo 3

Comprueba que la regla de Laplace cumple las siguientes propiedades:

$$P(\Omega) = 1 \qquad\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Considera el espacio muestral (Ω) y los eventos disjuntos A y B del **Ejemplo 2**.

1. Utiliza la regla de Laplace para calcular la probabilidad de seleccionar a cualquier estudiante.

   $$P(\Omega) = \frac{142}{142} = 1$$

2. Los eventos disjuntos A y B cumplen con:

   $$P(A \cup B) = \frac{72}{142} \qquad\qquad P(A) + P(B) = \frac{32}{142} + \frac{40}{142} = \frac{72}{142}$$

   Por lo tanto, la regla de Laplace cumple con las propiedades.

- ¿Qué pasos te resultaron más complejos?, ¿por qué? Comenta con tu curso para aclarar tus dudas.
- Usa $P(\Omega) = 1$ y las igualdades $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ y $\varnothing = \Omega \cap \varnothing$ para demostrar que $P(\varnothing) = 0$. Luego coméntalo con tu curso.

EJEMPLO 4

Los estados nutricionales se dividen en 5: enflaquecido, normal, sobrepeso, obeso y obeso mórbido. Estas categorías se obtienen a partir del Índice de masa corporal (IMC) de las personas. Según un informe del Ministerio de Salud (Minsal), se estima que en la población chilena estos estados nutricionales se encuentran distribuidos de la siguiente manera:

Estado nutricional de la población chilena					
Estado nutricional	Enflaquecido	Normal	Sobrepeso	Obeso	Obeso mórbido
Frecuencia porcentual	1,3 %	24,5 %	39,8 %	31,2 %	?

Fuente: Ministerio de Salud (16 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_86*

Usando esta información, si se escoge al azar a una persona chilena, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea obesa mórbida?

1. Identifica los eventos.

   Al seleccionar al azar a una persona, esta puede tener solo uno de los estados.

   Por lo tanto, hay 5 eventos posibles, los cuales son disjuntos, ya que una persona no puede presentar dos estados distintos a la vez.

   Los eventos disjuntos son:

   - A: Estar enflaquecido.
   - B: Estar normal.
   - C: Estar con sobrepeso.
   - D: Estar obeso.
   - E: Estar obeso mórbido.

2. Determina la probabilidad de cada evento.

   Considera la frecuencia relativa asociada al porcentaje de cada evento como una medida de probabilidad.

   $P(A) = 0{,}013$ $P(B) = 0{,}245$ $P(C) = 0{,}398$ $P(D) = 0{,}312$

   Recuerda que la frecuencia relativa (f_r) y porcentual $f(\%)$ cumplen con lo siguiente:

   $f(\%) = f_r \cdot 100\ \%$

3. Determina la probabilidad del evento E.

   Los eventos son disjuntos y todos forman el espacio muestral completo, es decir:

   $$\Omega = A \cup B \cup C \cup D \cup E$$

   Una persona debe presentar alguno de los 5 estados, o sea, presentar alguno de los eventos.

   Si la frecuencia relativa es una medida de probabilidad, debe cumplir la regla aditiva y, además, la medida del espacio muestral debe ser 1. Es decir:

   $$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A \cup B \cup C \cup D \cup E) \\ 1 &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D)) + P(E) \\ 1 &= 0{,}013 + 0{,}245 + 0{,}398 + 0{,}312 + P(E) \\ 1 &= 0{,}968 + P(E) \quad / -0{,}968 \\ 1 - 0{,}968 &= P(E) \\ 0{,}032 &= P(E) \end{aligned}$$

4. Responde.

   La probabilidad de que la persona seleccionada sea obesa mórbida es 0,032 o 3,2 %.

- ¿Qué te resultó más difícil de entender?, ¿por qué?
- ¿De qué forma puedes reforzar tus aprendizajes?

BDA U4_ACT_20

Ejemplo 5

Una persona debe rendir el examen de conducir. Este considera varias etapas, un examen médico, un examen teórico y un examen práctico. Ella ya aprobó el examen médico y solo le falta aprobar los otros dos. Según información que maneja, los porcentajes de aprobación de estos exámenes se muestran en las imágenes.

Práctico ▶ 80 %

Teórico ▶ 90 %

Si el 95 % aprueba alguno de los dos exámenes que se muestran en las imágenes, ¿cuál es la probabilidad de que la persona apruebe ambos exámenes?

1. Identifica los eventos.

En este caso solo hay dos eventos.

A: Aprueba el examen práctico.

B: Aprueba el examen teórico.

$A \cup B$: Aprueba el examen teórico **o** el práctico.

$A \cap B$: Aprueba el examen teórico **y** el práctico.

2. Determina las probabilidades conocidas y las que hay que calcular.

El problema indica que las probabilidades son las siguientes:

$P(A) = 0{,}8$ $\quad$ $P(B) = 0{,}9$ $\quad$ $P(A \cup B) = 0{,}95$

Debes calcular $P(A \cap B)$.

3. Aplica la regla aditiva de la probabilidad.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0{,}95 = 0{,}8 + 0{,}9 - P(A \cap B)$$
$$0{,}95 = 1{,}7 - P(A \cap B) \;/ + P(A \cap B)$$
$$0{,}95 + P(A \cap B) = 1{,}7 \;/ - 0{,}95$$
$$P(A \cap B) = 1{,}7 - 0{,}95$$
$$P(A \cap B) = 0{,}75$$

4. Responde.

La probabilidad de aprobar ambos exámenes es 0,75, o escrito como porcentaje, 75 %.

- ¿Qué pasos debes seguir para calcular la probabilidad de la unión de eventos? Explica.
- ¿Crees que mostraste una actitud crítica al evaluar la información matemática en la resolución de los ejemplos?, ¿por qué?
- ¿Crees que valoraste el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social? Explica.
- ¿Qué errores cometiste al desarrollar el **Ejemplo 5**?, ¿qué puedes hacer para no volver a cometerlos?

EJEMPLO 6

Según un estudio llamado «La lectura y su relación con la salud y el bienestar de las personas», la lectura tiene aspectos protectores, como paliar la soledad, evitar pensamientos negativos y gestionar mejor las emociones.

Fuente: Scielo (16 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_87*

En una librería se lleva el registro de las compras que realizan sus clientes y se hace un ranking con los 100 libros más comprados. De estos, algunos fueron adaptados a películas, otros adaptados a series de televisión y otros al teatro. A continuación, se resume el porcentaje de libros adaptados en cada caso:

Películas: 30 %	Películas y series: 6 %	No adaptado: 11 %
Series: 35 %	Películas y teatro: 2 %	
Teatro: 15 %	Teatro y series: 1 %	

Según los datos, ¿cuál es la probabilidad de que un libro sea adaptado a película, serie y teatro?

1. Identifica los eventos.

   En este caso, los eventos son los siguientes:

   A: Libro adaptado a película. C: Libro adaptado al teatro.
   B: Libro adaptado a serie. D: Libro no adaptado.

   Los libros no adaptados corresponden al complemento del evento $A \cup B \cup C$, o sea, $(A \cup B \cup C) \cap D = \varnothing$.

2. Determina las probabilidades.

   Las probabilidades de los eventos se pueden obtener a partir de las frecuencias porcentuales dadas.

   $P(A) = 0{,}3$ $P(B) = 0{,}35$ $P(C) = 0{,}15$ $P(A \cap B) = 0{,}06$ $P(A \cap C) = 0{,}02$ $P(B \cap C) = 0{,}01$ $P(D) = 0{,}11$

3. Aplica la regla aditiva de la probabilidad.

   Para aplicar la regla aditiva, debes conocer la probabilidad $P(A \cup B \cup C)$. Para obtenerla, puedes considerar que el evento «Libro no adaptado» (D) es el complemento de la unión de los libros adaptados, es decir:

$$P(\Omega) = 1$$
$$P(A \cup B \cup C) + P(D) = 1$$
$$P(A \cup B \cup C) + 0{,}11 = 1 \quad / -0{,}11$$
$$P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}11$$
$$P(A \cup B \cup C) = 0{,}89$$

   Ahora, aplica la regla aditiva.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$0{,}89 = 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}15 - 0{,}06 - 0{,}02 - 0{,}01 + P(A \cap B \cap C)$$
$$0{,}89 = 0{,}71 + P(A \cap B \cap C) \quad / -0{,}71$$
$$0{,}89 - 0{,}71 = P(A \cap B \cap C)$$
$$0{,}18 = P(A \cap B \cap C)$$

   Esta es la **regla aditiva** para la **unión de tres eventos**.

4. Responde.

   La probabilidad de que el libro haya sido adaptado a película, serie y teatro es de 0,18, que en términos porcentuales corresponde al 18 %.

BDA U4_ACT_21 a 24

Regla multiplicativa de la probabilidad

La anemia es una afección en la que el número de glóbulos rojos o la concentración de hemoglobina que contienen son inferiores a lo normal. La hemoglobina es una proteína necesaria para transportar oxígeno. Cuando una persona tiene muy pocos glóbulos rojos, estos son anómalos o no contienen suficiente hemoglobina, se reduce la capacidad de la sangre para transportar oxígeno a los tejidos del organismo, lo que puede causar síntomas como agotamiento, debilidad, mareos y dificultad para respirar, entre otros.

La probabilidad de un evento puede cambiar si se cambia el espacio de referencia. Por ejemplo, la anemia es un problema de salud pública en el mundo que afecta particularmente a los niños pequeños, las mujeres en toda su vida fértil, las embarazadas y las puérperas. La OMS calcula que la anemia afecta a un 20 % de los niños de 6 a 59 meses de edad, un 37 % de las embarazadas y un 30 % de las mujeres de 15 a 49 años. Estos datos se pueden interpretar que la probabilidad de tener anemia depende de la edad o condición de la persona.

En Chile, se implementó la harina de trigo fortificada con hierro desde 1951 como medida preventiva, a pesar de ello, la anemia continúa siendo un problema de salud pública, pues los índices en mujeres embarazadas y niños continúan elevados, reportándose cifras de hasta 24 % y 28 %, respectivamente.

Fuentes: OMS (15 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_88*
Prensa médica (15 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_89*

- ¿Por qué podría ser importante determinar la probabilidad de eventos que dependen de otros?
- ¿Crees que existe alguna relación entre las probabilidades de los eventos ser mujer de 15 a 49 años y estar embarazada? Comenta con tu curso.
- ¿En qué otro ámbito crees que se utilicen las probabilidades? ¿Por qué razón piensas que se usan?
- ¿Qué conocimientos previos utilizaste para responder?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_90* para ver un ejemplo de eventos dependientes.

Regla multiplicativa de la probabilidad

Dos eventos son **independientes** si la realización de uno **no afecta** la probabilidad del otro.

La **probabilidad de la intersección** de dos eventos independientes A y B se calcula con la siguiente expresión:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A continuación, desarrollarás la **regla multiplicativa de la probabilidad** y la aplicarás en la resolución de problemas.

Ejemplo 1

El rendimiento físico en un deporte reflejado en los resultados de competencias tiene mucho que ver con la cantidad y calidad del entrenamiento que se realice para su preparación. Sin embargo, hay deportes en donde se ha mostrado que ciertas características físicas o genéticas favorecen buenos resultados.

Por ejemplo, en carreras de velocidad como 100 m planos ha existido superioridad en personas afrodescendiente, mientras que, en el tenis de mesa, los asiáticos dominan los podios. Aunque la genética juegue un papel primordial, el entrenamiento y la disciplina son fundamentales.

Fuente: Revista UDCA (17 de mayo de 2024)
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_91

Una persona tiene una probabilidad de ganar una competencia del 70 %. Ella asiste a dos competencias. Ganar las dos competencias tiene una probabilidad de 49 %. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la segunda competencia?

1. Define los eventos y sus probabilidades.

   Los eventos de interés son los siguientes:

   - A: Ganar en la primera competencia. ▶ $P(A) = 0{,}7$
   - B: Ganar en la segunda competencia.
   - $A \cap B$: Ganar en la primera competencia y ganar en la segunda competencia. ▶ $P(A \cap B) = 0{,}49$

2. Plantea el problema de manera probabilística.

   Debes determinar la probabilidad de ganar la segunda competencia. Para esto, debes calcular $P(B)$.

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}49}{0{,}7} = 0{,}7$$

3. Responde.

   La probabilidad de ganar la segunda competencia es 0,7 o 70 %.

- ¿Qué características debe tener un problema para poder aplicar la regla multiplicativa en el cálculo de probabilidades?
- ¿Es correcto afirmar que la probabilidad de perder en la primera competencia es 0,3?, ¿por qué?
- ¿Cómo calcularías la probabilidad de que la persona pierda en ambas competencias?
- Explica cómo determinarías la probabilidad de que la persona gane en una de las competencias.

BDA U4_ACT_25

EJEMPLO 2

En la siguiente tabla se resume la relación entre actividad física y la sospecha de trastornos depresivos.

		Actividad física en el último mes		
		No	Sí	Total
Sospecha de algún trastorno depresivo	No	2 347	671	3 018
	Sí	319	65	384
	Total	2 666	736	3 402

Fuente: Ministerio de Salud (16 de mayo de 2024) *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEU4_86*

Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

A: Realizó actividad física el último mes.

B: No realizó actividad física el último mes.

C: Tiene sospecha de trastorno depresivo.

D: No tiene sospecha de trastorno depresivo.

$A \cap C$: Tiene sospecha de trastorno depresivo y realizó actividad física.

$B \cap C$: Tiene sospecha de trastorno depresivo y no realizó actividad física.

Luego, interpreta los resultados.

1. Calcula las probabilidades de manera directa.

   Determina el tamaño de la muestra y los resultados a favor para cada evento.
   El tamaño de la muestra es $\#\Omega = 2\,347 + 319 + 671 + 65 = 3\,402$.

$$P(A) = \frac{671 + 65}{3\,402} = \frac{736}{3\,402} \approx 0{,}22 \qquad P(D) = 1 - P(C) \approx 1 - 0{,}11 = 0{,}89$$

$$P(B) = 1 - P(A) \approx 1 - 0{,}22 = 0{,}78 \qquad P(A \cap C) = \frac{65}{3\,402} \approx 0{,}02$$

$$P(C) = \frac{319 + 65}{3\,402} = \frac{384}{3\,402} \approx 0{,}1 \qquad P(B \cap C) = \frac{319}{3\,402} \approx 0{,}09$$

2. Interpreta los resultados obtenidos.

   Puedes notar que si restringes el espacio muestral, la probabilidad de tener sospechas de un trastorno depresivo podría ser obtenida de la siguiente manera:

Espacio muestral: solo personas que realizaron actividad física.	**Espacio muestral**: solo personas que no realizaron actividad física.
$P(C) = \frac{65}{65 + 671} = \frac{65}{736} \approx 0{,}09$	$P(C) = \frac{319}{319 + 2\,347} = \frac{319}{2\,666} \approx 0{,}12$

   Se puede inferir que hacer actividad física puede disminuir la probabilidad de tener algún trastorno depresivo.

Ejemplo 3

La salud de dos personas podría estar relacionada si ambas mantienen hábitos similares o viven en ambientes similares, sin embargo, hay muchas características que provienen de una condición genética que pueden hacerlas más o menos sanas en un mismo ambiente.

Un investigador quiere analizar si hay relación entre la diabetes y la zona donde la persona vive, rural o urbana. Para esto cuenta con los siguientes datos:

		Zona		
		Rural	Urbana	Total
Diabetes	No	726	3 997	4 723
	Sí	75	319	394
	Total	801	4 316	5 117

¿Tener diabetes es independiente de vivir en zona urbana?

1. Identifica los eventos.

   Los eventos de interés son los siguientes:

   A: La persona vive en área urbana.

   B: La persona vive en área rural.

   C: La persona tiene diabetes.

   D: La persona no tiene diabetes.

   $A \cap C$: La persona tiene diabetes y vive en área urbana.

2. Determina la probabilidad de cada evento.

   La probabilidad de cada evento está dada por su frecuencia relativa.
   El tamaño de la muestra es $\#\Omega = 726 + 75 + 3\,997 + 319 = 5\,117$.

   $P(A) = \dfrac{3\,997 + 319}{5\,117} = \dfrac{4\,316}{5\,117} \approx 0{,}84$ $\quad P(C) = \dfrac{319 + 75}{5\,117} = \dfrac{394}{5\,117} \approx 0{,}077$ $\quad P(A \cap C) = \dfrac{319}{5\,117} \approx 0{,}06$

3. Verifica la regla multiplicativa de la probabilidad.

   $$\frac{P(A \cap C)}{P(A)} \approx \frac{0{,}06}{0{,}84} = 0{,}071 \neq 0{,}077$$

4. Responde e interpreta el resultado.

   En este caso, $\dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} \neq P(C)$, lo que implicaría que no hay independencia entre los eventos, sin embargo, las probabilidades son cercanas.

   > El enfoque frecuentista, basado en la muestra, depende de la cantidad de ensayos y la probabilidad irá cambiando cuando se aumenta el tamaño de la muestra, pero debería aproximarse a un valor fijo. Cuando ocurren estos valores cercanos con el enfoque frecuentista, existen herramientas estadísticas para determinar si las diferencias observadas son producto del azar de la muestra o si efectivamente son grandes diferencias.

   Por ahora, solo podemos concluir que no hay independencia entre los eventos, es decir, vivir en zona urbana podría afectar la probabilidad de tener diabetes.

- Explica con tus palabras cuándo la probabilidad de la intersección de dos eventos es igual al producto de las probabilidades.
- ¿Crees que se podría usar un diagrama de Venn o un diagrama de árbol para representar un experimento en varias etapas? Justifica tu respuesta.

BDA U4_ACT_26

Diagrama de árbol

Un **diagrama de árbol** permite representar un experimento aleatorio de varias etapas, como la extracción sucesiva de cartas, el lanzamiento sucesivo de monedas y la extracción sucesiva de bolas de una tómbola.

En un diagrama de árbol se pueden asignar probabilidades en cada etapa considerando la ocurrencia de la etapa anterior, es decir, verificando si los resultados entre etapas son **independientes**.

La **probabilidad de una rama del árbol** se obtiene como el **producto** de las probabilidades sucesivas obtenidas en cada etapa, es decir, se aplican las **reglas multiplicativas de la probabilidad**.

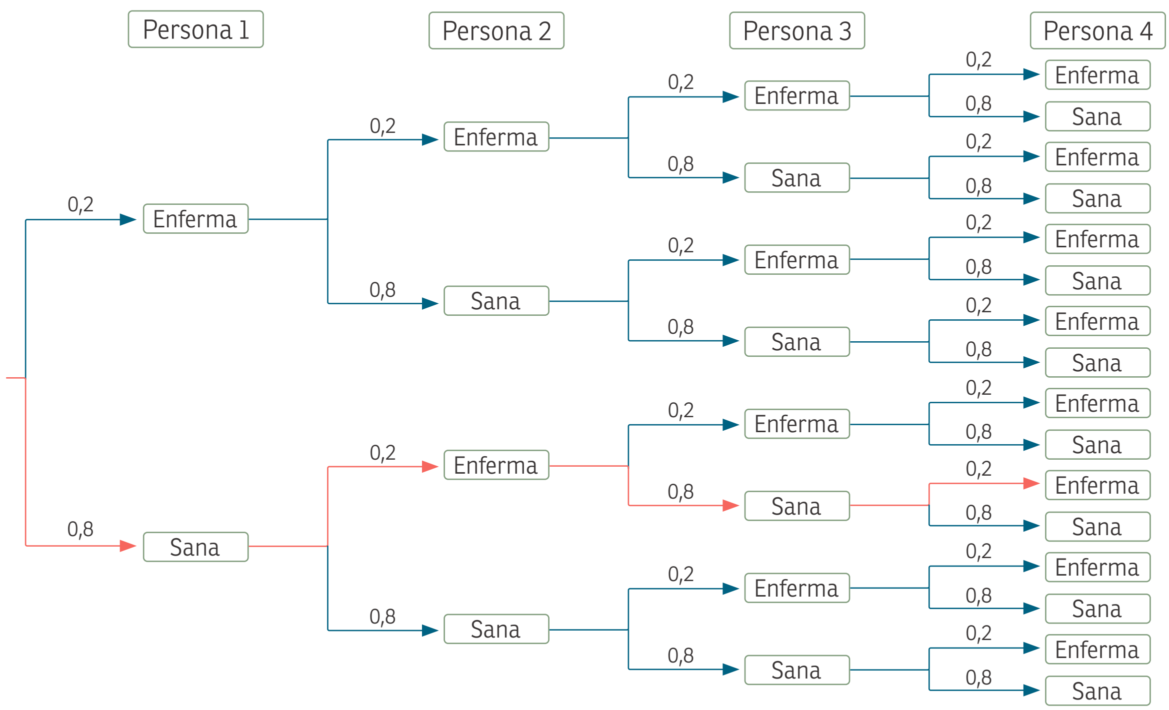
Las **ramas de un diagrama de árbol** representan eventos elementales, **disjuntos** entre sí, por lo que la probabilidad de la unión de estos eventos es la **suma de las probabilidades**, es decir, se aplican las **reglas aditivas de la probabilidad**.

Ahora, utilizarás un **diagrama de árbol** para representar la probabilidad de que haya cierta cantidad de enfermos en una población.

Ejemplo 4

En el área de la salud es común analizar una población compuesta de individuos con ciertas características individuales, y muchas veces el objetivo es querer contar la cantidad de enfermos o determinar la probabilidad de que se enferme un número determinado de personas en la población. Si hay un grupo de 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que 2 estén enfermas?

1. Para modelar, realiza algunos supuestos.
   - Cada persona tiene la misma probabilidad de estar enferma. Supón 0,2.
   - Que una persona esté enferma es independiente de que otra lo esté, es decir, la probabilidad de enfermarse no depende de si otro individuo está enfermo.
2. Para modelar una situación, muchas veces es conveniente representarla. Usa un diagrama de árbol para representar los distintos escenarios y sus probabilidades:



3. Utiliza el diagrama de árbol para calcular la probabilidad de un evento en particular.

Por ejemplo, la probabilidad de que la primera persona esté sana (S_1), la segunda enferma (E_2), la tercera sana (S_3) y la cuarta enferma (E_4).

Asume la independencia de los eventos y aplica la regla multiplicativa.

$$\begin{aligned} P(S_1 \cap E_2 \cap S_3 \cap E_4) &= P(S_1) \cdot P(E_2) \cdot P(S_3) \cdot P(E_4) \\ &= 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \\ &= (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 \\ &= 0{,}0256 \end{aligned}$$

4. Ahora, para calcular la probabilidad de que dos personas estén enfermas (evento A), se pueden dar las siguientes opciones:

- Se enferman las personas 1 y 2, y las otras están sanas. ▶ $E_1 \cap E_2 \cap S_3 \cap S_4$
- Se enferman las personas 1 y 3, y las otras están sanas. ▶ $E_1 \cap S_2 \cap E_3 \cap S_4$
- Se enferman las personas 1 y 4, y las otras están sanas. ▶ $E_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap E_4$
- Se enferman las personas 2 y 3, y las otras están sanas. ▶ $S_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap S_4$
- Se enferman las personas 2 y 4, y las otras están sanas. ▶ $S_1 \cap E_2 \cap S_3 \cap E_4$
- Se enferman las personas 3 y 4, y las otras están sanas. ▶ $S_1 \cap S_2 \cap E_3 \cap E_4$

5. Como debes considerar todas estas opciones, esto es equivalente a la unión de los eventos:

$$\begin{aligned} A = {} & (E_1 \cap E_2 \cap S_3 \cap S_4) \cup (E_1 \cap S_2 \cap E_3 \cap S_4) \cup (E_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap E_4) \cup (S_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap S_4) \cup \\ & (S_1 \cap E_2 \cap S_3 \cap E_4) \cup (S_1 \cap S_2 \cap E_3 \cap E_4) \end{aligned}$$

Todos estos eventos son disjuntos, por lo que la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades, entonces, aplicas la regla aditiva.

$$\begin{aligned} P(A) = {} & P(E_1 \cap E_2 \cap S_3 \cap S_4) + P(E_1 \cap S_2 \cap E_3 \cap S_4) + P(E_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap E_4) + P(S_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap S_4) + \\ & P(S_1 \cap E_2 \cap S_3 \cap E_4) + P(S_1 \cap S_2 \cap E_3 \cap E_4) \end{aligned}$$

Como calculaste en el **paso 3**, cada una de estas probabilidades es $(0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(A) &= (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 + (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 + (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 + (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 + (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 + (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 \\ &= 6 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2 \\ &= 6 \cdot 0{,}0256 \\ &= 0{,}1536 \end{aligned}$$

6. Responde.

La probabilidad de que dos personas estén enfermas es de 0,1536.

- ¿Cómo calcularías la probabilidad de que haya 3 personas enfermas?, ¿y una?
- Explica cómo se relacionan las propiedades de la unión, intersección y los diagramas de árbol.

» Para finalizar la **Lección 2**...

- ¿Qué estrategias nuevas usaste para resolver problemas de probabilidad? Descríbelas
- ¿Qué más te interesa aprender sobre este contenido?
- ¿Qué conocimientos previos fueron importantes para el desarrollo de esta lección?
- ¿Lograste transmitir de forma adecuada tus razonamientos e ideas? Explica.

BDA U4_ACT_27 a 30

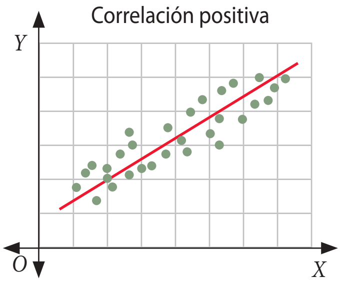
Síntesis de Unidad 4 · Probabilidad y estadística

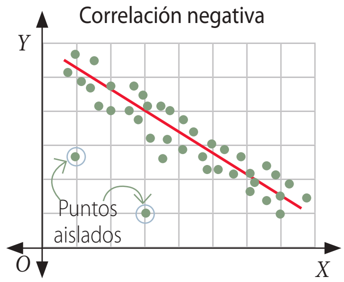
Lección 1 » Análisis de poblaciones

» Aprendiste...

Nube de puntos

Gráfica de un conjunto de pares ordenados en el plano cartesiano, en que las coordenadas de cada punto corresponden a una **variable cuantitativa** en estudio.





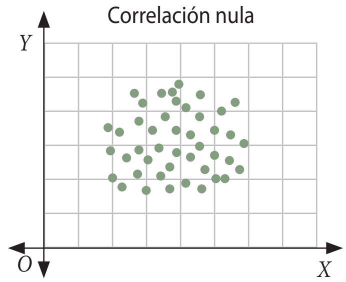


Tabla de doble entrada o tabla de contingencia

Sirve para contar la cantidad de individuos u objetos con dos tipos de características o **variables cualitativas**.

Título

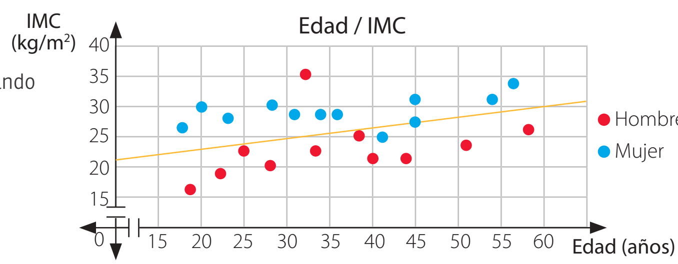
Categorías de la variable 2

Categorías de la variable 1

Deportes practicados por estudiantes			
Deporte	Fútbol	Balonmano	Básquetbol
Natación	2	5	3
Tenis	6	7	8
Atletismo	1	2	6

Comparación de dos poblaciones

La **nube de puntos** permite **comparar** dos poblaciones cuando se relacionan dos variables cuantitativas.



¿Usaste de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información y reconociste el trabajo de otros?

» Lograste...

- Registrar distribuciones de dos características distintas de una misma población en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos.
- Comparar poblaciones mediante indicadores, tablas y representaciones gráficas.

¿Qué situaciones pudiste expresar con gráficos de nubes de punto o tablas de doble entrada?

¿En qué otras situaciones crees que puedes usar estas representaciones para relacionar sus variables? ¿Por qué es importante comparar variables en dos poblaciones?

» Aplicaste...

- La descripción en las soluciones propias y los procedimientos utilizados.
- La organización, análisis y el hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.

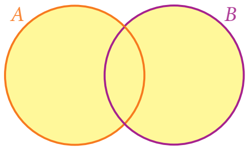
Lección 2 » Reglas de la probabilidad

» Aprendiste...

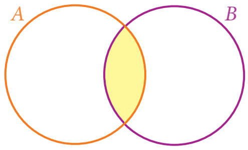
Unión e intersección de eventos

Dados los eventos A y B:

- La **unión** es el conjunto $(A \cup B)$, en el que cada elemento pertenece a A o pertenece a B.



- La **intersección** es el conjunto $(A \cap B)$, en el que cada elemento pertenece a A y pertenece a B.



Al interpretar problemas, puedes considerar que la **unión de eventos** está asociada a la **disyunción «o»** y la **intersección de eventos** se asocia con la **conjunción «y»**.

Regla aditiva de la probabilidad

La probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B se calcula con la siguiente expresión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si los eventos son **disjuntos**, entonces, $P(A \cap B) = 0$.

En un **diagrama de árbol** sus ramas representan **eventos disjuntos** entre sí, por lo que la probabilidad de la **unión** de estos eventos es la **suma de las probabilidades**.

Regla multiplicativa de la probabilidad

Si los eventos A y B son **independientes**, la probabilidad de que ocurran el evento A y el evento B se calcula con la siguiente expresión:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B).$$

La probabilidad de una **rama del diagrama de árbol** se obtiene como el **producto** de las probabilidades sucesivas obtenidas en cada etapa.

¿Mostraste una actitud crítica al evaluar la información matemática y valoraste el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social?

» Lograste...

- Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica en el contexto de la resolución de problemas.

Sobre el cálculo de probabilidades, ¿consideras que el uso de las fórmulas permite calcularlas de manera más simple? De ser así, ¿cuáles son tus argumentos? De no serlo, ¿cuál es tu apreciación?

Sobre utilizar un diagrama de árbol para el cálculo de probabilidades, ¿qué dificultades se te presentaron?

» Aplicaste...

- La utilización de lenguaje matemático para identificar tus propias ideas o respuestas.
- La demostración de resultados mediante definiciones y propiedades.
- El ajuste de modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerque más a la realidad.

BDA U4_ACT_31 y 32
U4_IMA_2

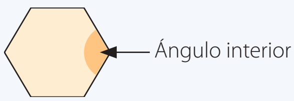
Glosario

A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje X en el plano cartesiano.

Altura: cada uno de los segmentos perpendiculares trazados desde un vértice de una figura al lado opuesto o a una prolongación de este.

Ángulo interior: es el formado por dos lados contiguos de un polígono y se encuentra dentro de este.



Área: medida de una superficie.

B

Base de una potencia: corresponde al factor que se repite en una potencia.

C

Círculo: región o área del plano delimitada por una circunferencia.

Circunferencia: es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia r de un punto O.

Coeficiente numérico: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Constante de proporcionalidad: valor de la razón entre dos variables proporcionales.

Cuadrado: cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores miden 90° y sus lados tienen la misma medida.

Cuadrado perfecto: es el resultado de multiplicar un número por si mismo.

Cuadrilátero: región del plano limitada por cuatro segmentos, entre los cuales no hay tres colineales.

Cuerda: segmento trazado entre dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

D

Decimal finito: número decimal con una cantidad finita de cifras decimales.

Diámetro: cuerda de mayor longitud en una circunferencia.

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo se cumple para un valor de la incógnita.

Evento: subconjunto del espacio muestral.

Experimento aleatorio: experimento en el que no se tiene certeza de lo que pasará. Por lo tanto, no se puede predecir su resultado.

Exponente: término de una potencia que indica cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Expresión algebraica: términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción.

F

Factor literal: parte no numérica de un término algebraico.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

Frecuencia relativa: razón entre la frecuencia absoluta y el total de datos de la muestra o población.

I

Inecuación: desigualdad en la que aparece una incógnita.

L

Longitud: distancia entre dos puntos.

M

Mediana (M_e): valor que ocupa el lugar central en una distribución de datos.

Muestra: subconjunto de la población a partir de la cual se pretende realizar inferencias para dicha población.

N

Números enteros ($\mathbb{Z}$): conjunto numérico formado por los números naturales ($\mathbb{N}$), el cero y los inversos aditivos de los números naturales.

Número decimal: está formado por una parte entera y una parte decimal separada por una coma decimal.

Número mixto: número representado por un número entero y por una fracción.

Números racionales ($\mathbb{Q}$): conjunto numérico formado por todos los números que se pueden escribir como una fracción, en la cual el numerador y el denominador son números enteros ($\mathbb{Z}$). Además, el denominador debe ser distinto de cero.

$$\left.\left.\mathbb{N}\right\}\ \mathbb{Z}\right\}\ \mathbb{Q}$$

O

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje Y) en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes del plano cartesiano. Se representa con el punto (0, 0).

P

Paralelogramo: cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Paralelepípedo: es un cuerpo geométrico formado por seis caras que son paralelogramos, las caras opuestas tienen iguales características y son paralelas entre si.

Par ordenado: en el plano cartesiano corresponde a una dupla de elementos, el primero indica la abscisa y el segundo la ordenada.

Perímetro (P): longitud del borde de una figura. En un polígono se calcula como la suma de las medidas de sus lados.

Pi (π): número irracional que corresponde a la razón entre el perímetro (P) y el diámetro de un circulo.

Plano cartesiano: es el plano euclidiano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares que determinan cada punto en el plano.

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se quiere estudiar una o varias características.

Polígono: figura plana formada por una línea poligonal cerrada y su interior.

Porcentaje: razón cuyo consecuente es 100. Se representa por el símbolo %.

Potencia: expresión usada para indicar la multiplicación de un factor por sí mismo una determinada cantidad de veces.

Probabilidad: posibilidad de ocurrencia de un evento. Toma valores entre 0 y 1, pero también se puede escribir como porcentaje.

Producto notable: son multiplicaciones entre expresiones algebraicas con características determinadas y cuyo resultado puede obtenerse de manera simple.

Proporción: igualdad de dos razones.

R

Radio: segmento de recta que une el centro de una circunferencia con un punto de ella.

Razón: comparación de dos números mediante el cociente entre ellos.

Rectángulo: paralelogramo en el que sus ángulos interiores miden 90° y sus lados opuestos tienen la misma medida.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento, determinando el cociente entre los casos favorables y los casos posibles, en un experimento aleatorio, cuando sus resultados son equiprobables.

T

Término algebraico: cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

V

Vector: segmento orientado, determinado por su origen y su extremo. Se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido.

Sitios *web*

- *https://www.mineduc.cl*
- *https://www.curriculumnacional.cl/portal/*
- *https://www.geogebra.org/graphing*
- *http://www.wolframalpha.com/*
- *http://www.minsal.cl*
- *https://www.conicyt.cl/*
- *https://www.energia.gob.cl/*
- *https://www.who.int/es*
- *https://www.monumentos.gob.cl/*
- *https://www.mnhn.gob.cl/*
- *https://www.paho.org/es*
- *https://uchile.cl/*
- *https://www.ine.gob.cl/*
- *https://www.nasa.gov/*
- *https://cambioclimatico.mma.gob.cl/*
- *http://chileprecolombino.cl/pueblos-originarios/*
- *http://www.csn.uchile.cl/*
- *https://www.inmujeres.gob.es/*
- *https://www.ncbi.nlm.nih.gov/*
- *https://injuv.gob.cl/*
- *https://www.unicef.org/chile/*
- *http://intef.es/*
- *https://www.unam.mx/*
- *https://www.conaf.cl/*
- *https://www.minciencia.gob.cl/*
- *https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/*
- *https://escenarioshidricos.cl/*
- *http://www.bibliotecanacionaldigital.gob.cl/visor/BND:47439*
- *https://www.conadi.gob.cl/storage/docs/Diccionario_mapudungun.pdf*

Bibliografía

- Busch, B. y Watson, E. (2023). *La ciencia del aprendizaje: 77 estudios que todo docente debe conocer.* México: Trillas.
- Gardner, H. (2017). *Inteligencias múltiples.* (2da ed. ampliada y revisada). Paidós.
- Mineduc (2017). *Orientaciones para la apropiación de las Bases Curriculares 7° básico a 2° medio.* Santiago: Mineduc.
- Mineduc (2023). *Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes.* Educación Básica y Media por asignatura. Mineduc.
- Mineduc (2023). *Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes*. Orientaciones Generales. Mineduc.
- Mineduc (2023). *Objetivos de Aprendizaje Priorizados: Visualización en los Textos Escolares de Matemática.* Mineduc.
- Mineduc (2023). *Orientaciones didácticas: Matemática*. Mineduc.
- Mineduc (2023). *Plan de Reactivación Educativa*. Santiago: Mineduc.
- Quigley, A. (2022). *El docente tutor: desarrolla hábitos exitosos para la enseñanza.* México: Trillas.
- Sharples, M. (2022) *Pedagogía práctica: nuevas formas de enseñar y aprender* . México: Trillas.
- Tovar, M. (2020). *Habilidades socioemocionales: por qué, para qué y cómo. México:* Trillas.

Anexo

Solucionario de las preguntas del Texto

Unidad 1 • Números

Página 7

1. Se utilizó la matemática para: calcular la velocidad, temperatura, orientación y combustible, planificar el despegue y aterrizaje, para diseñar la trayectoria, entre otros.

2. 2 250 000 km.

3. Se redujo a 39 477 km/h.

Habilidades del siglo XXI

- Sí, es correcto, ya que $2\,250\,000 = 225 \cdot 10\,000 = 15^2 \cdot 10^4$.
- Sí, es correcto, ya que $40\,000 = 4 \cdot 10\,000 = 2^2 \cdot 10^4$.

Conocimientos previos

- Respuestas variadas, se espera que cada estudiante pueda reconocer qué conocimientos necesita repasar.

Página 8

Lección 1 • Operatoria en los números racionales

El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

- Los números racionales son todos aquellos que pueden representarse como una fracción o como cociente de 2 números enteros.
- En que el denominador de los números enteros es 1 y el de los racionales puede ser cualquier número entero diferente a cero.
- Sí, ya que la altura del nanosatélite es 30 cm, está formado por 3 cubos de 10 cm de altura, y esta medida es menor que 40 cm.
- $\frac{2}{3}$ de la altura del nanosatélite.
- $\frac{2}{3}$ equivale a 0,6666666...
- Respuestas variadas. Por ejemplo, para conocer la supervivencia de estos en condiciones distintas a las de la Tierra.

Página 9

- Todo número natural o entero puede representarse como un número racional, porque puede escribirse como fracción; el numerador sería el mismo número natural o entero y el denominador sería 1.
- El cero es un número racional porque puede escribirse como fracción, donde el numerador sería 0 y el denominador cualquier número entero distinto de cero.
- $\frac{225}{10}$ es un número racional porque es posible escribirlo como fracción en el que su numerador y denominador son números enteros, y su denominador es distinto de cero.

Página 10

- Respuesta variada, se muestra un ejemplo. El concepto de número racional, ahora lo puedo utilizar para clasificar, transformar de decimal a fracción, calcular operaciones, entre otras.
- Podrían mencionar: restar la parte entera en el numerador y poner la cantidad correcta en el denominador.
- En el numerador se escribe el número completo (sin la coma ni la línea superior) menos el número formado antes del periodo y en el denominador tantos 9 como cifras tenga el periodo. Es decir, $3,\overline{24} = \frac{324 - 3}{99} = \frac{321}{99} = \frac{107}{33}$.

Página 11

- El número del **Ejemplo 2** ($5,\overline{185}$) se asemeja con el del **Ejemplo 3** ($1,4\overline{2}$) en que ambos tienen un período. Se diferencian en que el número del **Ejemplo 2** es un número decimal infinito periódico y el del **Ejemplo 3** es un número decimal infinito semiperiódico.
- Para restar los decimales y poder escribir el número decimal como fracción, ya que en una fracción el numerador y el denominador deben ser números enteros.
- Solo se pueden representar como fracción los decimales finitos, infinitos periódicos y semiperiódicos.
- Podrían mencionar cualquiera de las estudiadas.
- Respuesta variada, se muestran ejemplos: 1,55; 1,558;1,6; 1,63; 1,65; 1,67; 1,68; 1,685; 1,69; 1,695.
- Se espera que mencionen que sí, ya que les permite comparar y aclarar conocimientos, compartir dudas, entre otras.

Página 12

Adición y sustracción de números racionales

- Son números racionales, ya que son números decimales finitos y pueden escribirse como fracción.
- $12,5 = \frac{25}{2}$; $22,6 = \frac{113}{5}$; $38,8 = \frac{194}{5}$; $53,1 = \frac{531}{10}$; $72,5 = \frac{145}{2}$; $94,4 = \frac{472}{5}$.
- 94,4 – 72,5

Página 14

- Sí, sería el mismo resultado.

$$\frac{6\,025}{100} + \frac{1\,320}{100} + \frac{4\,593}{100} = \frac{11\,938}{100} \qquad \frac{20\,000}{100} - \frac{11\,938}{100} = \frac{8\,062}{100}$$

Página 17

- Por ejemplo, al preparar una receta, al hacer un presupuesto, al hacer un mueble, entre otros.
- Respuesta variada, se espera que mencionen alguna de las estrategias estudiadas.
- Podrían mencionar que volviendo a realizar un cálculo hasta obtener el resultado correcto.
- Respuesta variada, se muestran ejemplos: utilizar la bicicleta, disminuir el uso del plástico en el día a día, agregar más alimentos vegetales a nuestra dieta, desconectar el cargador del celular, preferir electrodomésticos eficientes, entre otras acciones.

Página 18

Multiplicación y división de números racionales

- Porque son números decimales finitos, por lo que se pueden transformar a fracción.
- 339,28 kg.
- Multiplicaría la rapidez por 2.
- 0,45 : 0,09 = 5 horas.
- $0{,}09 \cdot n$.

Página 20

- Sí puede dar como resultado un número entero. Por ejemplo, al multiplicar un número por su inverso multiplicativo.

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1$$

Página 22

- Respuestas variadas. Se espera que presenten algunas de las estrategias estudiadas.
- Sí. Por ejemplo, al dividir dos fracciones equivalentes $\frac{3}{2} : \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{12} = \frac{24}{24} = 1$.
- Al dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$, ya que al aplicar el inverso multiplicativo, se transforma en una fracción impropia.
- Podrían mencionar que sí, al buscar distintas estrategias para resolver.

Página 23

- Sí, ya que cualquier número entero se puede representar como un número racional.

Página 24

Operaciones combinadas

- Están en milímetros.
- La longitud es de 37,512 mm. Se relaciona con un número decimal finito, no con un número entero.
- Usando la multiplicación: $3 \cdot 0{,}662 = 1{,}986$ mm.
- Usando la multiplicación: $2 \cdot 36{,}85 = 73{,}7$ mm.
- $3 \cdot 0{,}662 + 2 \cdot 36{,}85 = 75{,}686$ mm
- $2 \cdot 36{,}85 - 0{,}662 = 73{,}038$ mm

Página 27

- Adición, sustracción, multiplicación y división de números racionales.
- Respuesta variada, podrían mencionar: seguir el orden de las operaciones, expresar números decimales como fracción, entre otras.
- Respuesta variada, podrían mencionar: no seguir el orden de las operaciones y que lo corrigieron al comparar con un compañero o usando la calculadora.

Página 29

Para finalizar la Lección 1

- Se espera que la respuesta sea afirmativa y explicando que buscando la estrategia más apropiada para resolver los problemas.
- Podrían mencionar que escucharon atentamente y utilizaron las ideas de los demás en sus resoluciones.

- Podrían mencionar que en situaciones relacionadas con geometría donde se deben aplicar distintas fórmulas para resolverlas.
- Se espera que sí, al relacionar conocimientos previos y aplicarlos en nuevas situaciones.
- Respuesta variada. Podrían mencionar proyectos que ayuden a la comunidad ejerciendo un rol a partir de sus fortalezas.

Página 30

Lección 2 • Potencias

Potencias de base y exponente entero

- Respuesta variada, podrían mencionar sus usos en la medicina.
- Se espera que valoren el uso de la matemática en la medicina para expresar números con varias cifras decimales.
- Al representar los números de manera más compacta.
- Se espera que respondan: $10^{-9} = \frac{1}{1\,000\,000\,000} = 0{,}000000001$.
- Respuesta variada. Se espera que utilicen los conocimientos acerca de números racionales y de potencias aprendidos.

Página 32

- Cuando el exponente es positivo, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$, con $a \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$; y

  cuando es negativo, $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ veces}}$, con $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ y $n > 0$.
- Cuando la base de una potencia es negativa, el signo del resultado dependerá del valor del exponente; si el exponente es par, el resultado será positivo; si el exponente es impar, el resultado será negativo. Esto sucede por la regla de los signos en la multiplicación.
- Se pueden utilizar en la astronomía, medicina, ingeniería, economía, entre otras. Se utilizan para abreviar una multiplicación iterada.
- Dependiendo del conjunto numérico al que pertenezca la base y el exponente de la potencia dependerá el resultado. Por ejemplo, base y exponente natural, el resultado será un número natural; base racional y exponente entero, el resultado será un número racional.

Página 34

Potencias de base racional y exponente entero

- Se debe multiplicar la medida inicial por $\frac{1}{2}$ por la cantidad de veces de la figura.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, en la que n representa el número de la figura.

Página 35

- Se aplica la definición de potencia, es decir, se multiplica la base por sí misma la cantidad de veces que indica el exponente.
- Respuesta variada, podría ser expresando (–1,8) como fracción y luego calcular el valor de la potencia.

Página 37

- Es una expresión matemática donde una fracción se eleva a un número entero.
- Respuesta variada. Podrían mencionar: al seguir una receta, pero queremos duplicar la cantidad de ingredientes, al calcular la probabilidad de obtener un número par al lanzar 3 dados, o el crecimiento de una colmena cuya población se duplica cada una hora, etc.
- Podrían mencionar que distribuyendo las tareas al trabajar en grupos y organizando los tiempos.

Página 38

Multiplicación y división de potencias

- La proporción entre la altura alcanzada en el rebote y la altura inicial.
- Llega a 64 cm. Se obtiene al multiplicar la altura inicial por el coeficiente de elasticidad elevado a la cantidad de rebotes.
- Se espera que apliquen los conocimientos relacionados con potencias y obtengan la siguiente expresión:

  $h_{final} = h_{inicial} \cdot \left(\frac{80}{100}\right)^n$, con n la cantidad de rebotes.

Página 40

- Conocer las propiedades de las potencias ayuda para calcular más rápido y eficiente un ejercicio.
- Las potencias de base entera se relacionan con las potencias de base racional ya que pueden transformarse entre sí utilizando las propiedades de las potencias, lo que permite hacer cálculos de manera más eficiente.

  Por ejemplo: $\left(\frac{3}{7}\right)^4 = \frac{(3)^4}{(7)^4}$ o $\frac{(3)^4}{(7)^4} = \left(\frac{3}{7}\right)^4$.

Página 41

- Por ejemplo, al pedir un préstamo, al calcular la probabilidad de que ocurra un evento, al estudiar el crecimiento poblacional, etc.
- Se relaciona con temas como: cálculo de áreas y volúmenes, cálculo de probabilidades, resolución de ecuaciones, etc.

Página 42

Crecimiento y decrecimiento exponencial

- Se espera que los estudiantes comprendan que la microbiota es un conjunto de bacterias beneficiosas para el ser humano.
- Se espera que los estudiantes valoren la investigación de Apolinaria, ya que es un gran aporte en el estudio de un tipo de cáncer.

Página 43

- n no puede pertenecer al conjunto de los números enteros, ya que el tiempo no puede ser negativo.
- Se aplica a una magnitud, en que su variación en el tiempo es proporcional a su valor, lo que implica que crece cada vez más rápido en el tiempo.

Página 45

- La gráfica obtenida es creciente, ya que al aumentar la cantidad de minutos, más bacterias hay.
- El crecimiento exponencial es cuando una cantidad inicial crece constantemente en cada período de tiempo y el decrecimiento exponencial, cuando disminuye constantemente en cada período de tiempo.

Para finalizar la Lección 2

- Podrían mencionar que lo hicieron en grupos o en plenaria describiendo paso a paso las estrategias utilizadas para resolver los problemas.

- Se espera que sí, aportando ideas y respetando a sus pares.
- Se espera que sí, usando gráficos, tablas, etc.
- En variados problemas de la vida diaria o en áreas relacionadas con Ciencias, por ejemplo.
- Se espera que respondan que sí. Pueden argumentar a partir de los ejemplos estudiados en la unidad.

Página 46

Síntesis de Unidad 1 • Números

Lección 1 • Operatoria en los números racionales

Aprendiste...

- Respuesta variada. Se espera que la gran mayoría de los estudiantes respondan de modo afirmativo, ya que se debe proponer el trabajo colaborativo y las actitudes de respeto por compañeros y compañeras.

Lograste...

- Respuesta variada. Por ejemplo, podrían mencionar que, en otras asignaturas, como Física o Química.
- Respuesta variada. Por ejemplo, podrían mencionar que el conocer los números racionales les ayudó a comprender otras materias en donde se utilizan.

Página 47

Lección 2 • Potencias

Aprendiste...

- Respuesta variada. Se espera que la gran mayoría de los estudiantes respondan de modo afirmativo y mencionen algunas situaciones como intentar resolver problemas hasta que las soluciones obtenidas fueran correctas.

Lograste...

- Respuesta variada. Por ejemplo, podrían mencionar que una potencia es la forma abreviada de una multiplicación iterada.
- Respuesta variada. Se espera que el trabajo en equipo sea beneficioso para los estudiantes y que lo manifiesten así, ya que cada uno puede aportar desde sus fortalezas al equipo y fortalecer sus debilidades a partir de sus compañeros.

Unidad 2 • Álgebra y funciones

Página 49

1. Porque se tiene una mejor calidad de vida, influye en la buena salud de las personas.
2. Podrían mencionar hacer deporte, tener una dieta balanceada, tomar agua, etc.
3. Podrían mencionar que mejora el estado de ánimo, la concentración y la memoria, entre otras.
4. Hacer deporte al aire libre en grupo, aumenta la energía, mejora el estado de ánimo, combate algunas enfermedades, mejora la calidad del sueño, entre otras.

Habilidades del siglo XXI

- Hay que sumar la medida de sus lados.

  El perímetro es $(2x + 2y)$ cm.
- Hay que calcular el área del afiche con marco y restarle el área del afiche sin marco.

  El área es $(xy - 1\,800)$ cm^2.

Conocimientos previos

- Podrían mencionar dificultades en los cálculos y que podrían resolverlas ejercitando.

Página 50

Lección 1 • Productos notables

Cuadrado y cubo de un binomio

- Se forma un cuadrado.
- Multiplicación, área y volumen de figuras.
- $(4x^2 + 4xy + y^2)$ cm^2.
- Sí, ya que la fruta aporta agua, vitaminas, minerales, fibra y antioxidantes que son fundamentales para la nutrición.
- Se relaciona con los productos notables porque estos son el resultado de la suma de las áreas de cuadrados y rectángulos.

Página 52

- Porque es el cuadrado del segundo término y todo número racional, distinto de cero, al cuadrado siempre es positivo.

Página 53

- Por ejemplo, cuando se analiza la tasa de interés en un financiamiento, para determinar el monto que se debe ahorrar al jubilarse, en los gastos diarios de la casa, etc.
- Resolución de ecuaciones.
- Respuesta variada. Podrían mencionar el planteamiento de la ecuación que modela el problema, ya que hay que determinar cómo se relacionan los datos.
- Es una expresión algebraica de dos términos cuya suma se encuentra elevado al cuadrado o a la potencia 2.
- La expresión $(a + b)^2$ es igual a $a^2 + b^2$, si se cumple que:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + b^2 \\ 2ab &= 0 \\ ab &= 0 \end{aligned}$$

  Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad se debe cumplir que $a = 0$ o $b = 0$.

  La expresión $(a - b)^2$ es igual a $a^2 - b^2$, si se cumple que:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= a^2 - b^2 \\ 2b^2 - 2ab &= 0 \\ 2b(b - a) &= 0 \\ b(b - a) &= 0 \end{aligned}$$

  Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad se debe cumplir que $b = 0$ o $a = b$.

Página 54

- Calcular el primer término al cuadrado.
- Podrían mencionar que sí, ya que buscaron distintas estrategias para resolver.
- Se espera que sí, en la discusión exponen sus ideas y escuchan los planteamientos de sus compañeros.
- Se espera que mencionen que sí, ya que pueden complementar sus ideas.
- Por ejemplo, cálculo de área para diseñar espacios, cálculo de intereses al pedir un crédito, cálculo de dimensiones para optimizar espacios, entre otros.

Página 55

- Es útil ya que permite resolver ecuaciones, factorizar, relacionar términos, entre otros, de manera más simple.
- Para completar el cuadrado de binomio porque así no se modifica el trinomio, ya que se está agregando cero.
- Se puede representar como $(5a + 3)^2 + 9$.

Página 57

- Volumen de cubos y prismas y operatoria de términos algebraicos.
- Es una expresión algebraica de dos términos cuya suma se encuentra elevado al cubo o a la potencia 3.
- La expresión $(x + y)^3$ es igual a $x^3 + y^3$, si se cumple que:

  $$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$$
  $$3x^2y + 3xy^2 = 0$$
  $$xy(x + y) = 0$$

  Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad se debe cumplir que $x = 0$ o $y = 0$ o $x = -y$.

  La expresión $(x - y)^3$ es igual a $x^3 - y^3$, si se cumple que:

  $$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$$
  $$-3x^2y + 3xy^2 = 0$$
  $$xy(y - x) = 0$$

  Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad se debe cumplir que $x = 0$ o $y = 0$ o $x = y$.
- $(2a^2b + 3ab^2)^3$

  $= (2a^2b)^3 + 3 \cdot (2a^2b)^2 \cdot 3ab^2 + 3 \cdot 2a^2b \cdot (3ab^2)^2 + (3ab^2)^3$

  $= 8a^6b^3 + 3 \cdot 4a^4b^2 \cdot 3ab^2 + 3 \cdot 2a^2b \cdot 9a^2b^4 + 27a^3b^6$

  $= 8a^6b^3 + 36a^5b^4 + 54a^4b^5 + 27a^3b^6$
- Cuadrado de binomio es una expresión algebraica de dos términos cuya suma se encuentra elevado al cuadrado o a la potencia 2 y se relaciona con el área de cuadrados. Cubo de binomio es una expresión algebraica de dos términos cuya suma se encuentra elevado al cubo o a la potencia 3 y se relaciona con el volumen de cubos.

Página 58

Suma por su diferencia

- $a^2 - b^2$
- a^2
- b^2
- El área del modelo 1 es igual al área del modelo 2 menos el área que se pintará de azul, por lo tanto, ambos modelos tienen igual área pintada de rojo y de amarillo.

Página 60

- En el lado de derecho de la igualdad se puede aplicar la suma por su diferencia y luego el cuadrado de un binomio.

Página 61

- Se debe calcular el cuadrado del primer término y restarle el cuadrado del segundo término.
- Se espera que mencionen las distintas estrategias usadas para resolver los problemas propuestos.

Página 62

Producto de binomios con un término en común

- $(a + q)$ y $(a + p)$.
- El área del fondo es pq, de las paredes es ap y aq y del cuadrado que se debe recortar es a^2.
- $a^2 + ap + aq + pq$
- Sí es creativa, ya que la mitad de las paredes están en la tapa y la otra mitad en la base, optimizando el cartón.
- Podrían proponer un diseño en que el fondo sea cuadrado.

Página 64

- Se debe calcular el término en común al cuadrado, más la suma de los dos términos no comunes multiplicado por el término común, más la multiplicación de los dos términos no comunes.
- Para multiplicar dos números usando el producto de dos binomios con un término común se debe:
  1. Descomponer los factores como una suma, pero ambos deben tener un sumando en común.
  2. Resolver la multiplicación utilizando el producto notable, calcular el término en común al cuadrado, más la suma de los dos términos no comunes multiplicado por el término común, más la multiplicación de los dos términos no comunes.
- Podrían mencionar que al plantear la expresión o al reducir términos semejantes, y los podrían revisar releyendo el problema y ejercitando.

Página 65

- Podrían mencionar su uso en otras áreas y situaciones cotidianas.

Página 67

- Podrían mencionar la del **Ejemplo 3**, donde se expresó como binomio las medidas del largo y el ancho de la base rectangular de la ruca. Se resolvió aplicando el producto de binomios con un término común: se calculó el término en común al cuadrado, más la suma de los dos términos no comunes multiplicado por el término común, más la multiplicación de los dos términos no comunes.
- Se espera que mencionen que ayuda, ya que favorece la comprensión al ver los contenidos desde otra perspectiva, fomenta el pensamiento crítico, entre otros.

Para finalizar la Lección 1

- Son útiles para resolver situaciones de manera más rápida y eficiente, al simplificar los cálculos.
- Podrían mencionar otros productos notables.
- Se espera que mencionen que sí.
- Se espera que mencionen que sí.
- Pueden ayudar a visualizar de mejor manera la situación, identificar ciertos patrones, resolver eficientemente la situación, entre otros.
- Se espera que mencionen que sí.

Página 68

Lección 2 • Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal con dos incógnitas

- El equilibrio entre la salud física y la salud mental es importante para poder sacar el máximo de nosotros, mejorando la calidad de vida y bienestar personal. La salud física influye en la salud mental y viceversa. Así, la salud mental ayuda al cuerpo a funcionar de mejor manera y la salud física aporta al bienestar emocional.
- Una ecuación sería $B_{em} = S_f$.
- Se debe despejar la incógnita que se está buscando, a través de operaciones matemáticas.
- Me ayudó saber resolver ecuaciones.
- Ayuda en el aprendizaje porque permite comprender y analizar los contenidos desde otra perspectiva, a comprender mejor los contenidos, a fomentar el pensamiento crítico, entre otros.

Página 69

- Podrían mencionar el establecer las dos incógnitas y cómo se relacionan, y las superaron representando el problema.

Página 70

- Podrían mencionar cualquiera de las representaciones (tabla o gráfico), que podrían potenciarse resolviendo variados problemas del mismo tipo.

Página 71

- Respuesta variada, podrían mencionar que interpretar los valores obtenidos, ya que esto define la respuesta.
- Una ecuación lineal con dos incógnitas se describe como $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas, a, b, c son números racionales y a y b deben ser distintos de cero.

Página 72

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

- Algunos puntos que pertenecen a la trayectoria del Barco 1 son: (–4, –6), (–1, –2) y (5, 6) y al Barco 2 son: (–1, –2), (1, –7) y (3, –12).
- Dibujaría las dos rectas con los puntos obtenidos y vería dónde se intersecan. En este caso, en el punto (–1, –2).

Página 73

- Sí, porque es el punto donde ambas rectas se intersecan, es decir, es el punto donde Lucas alcanzará a Diana.
- Tiene una única solución, ya que ambas rectas se intersecan en un solo punto.

Página 74

Resolución de sistemas de ecuaciones: método gráfico

- Se obtuvo dos puntos de cada ecuación y se unieron con la recta.
- Las rectas sí se intersecan, en el punto (125, 2 500).
- Significa que después de 125 segundos el ciclista 2 alcanza al ciclista 1, después de 2 500 metros recorridos.
- Sí facilita la comprensión de los contenidos porque ayuda a analizar los contenidos desde otra perspectiva, a fomentar el pensamiento crítico, entre otros.

Página 76

- En este método de resolución se debe identificar el punto de intersección de ambas rectas para obtener la solución del sistema de ecuaciones. En este caso, para saber las coordenadas del lugar donde chocarían ambos barcos.
- El método gráfico ayuda a resolver sistemas de ecuaciones porque hace visible si las ecuaciones intersecan en algún punto, si son coincidentes o si son paralelas.

Página 77

- Dado que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, todas sus posibles respuestas para conocer las edades actuales de las personas son válidas, partiendo de la base que el hermano mayor debe tener al menos 5 años.

Página 78

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de igualación

- Multiplicando el precio por la cantidad de cada producto y luego sumando todos los resultados.
- La cantidad de monedas de $500 y la de monedas de $100.
- Sí, se puede obtener la cantidad de monedas de $500 y $100, ya que se tendrían dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Consideraría que en total son 8 monedas y el monto total de la compra.
- Al despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones se obtienen dos ecuaciones iguales, es decir, que tienen el mismo valor.
- Despejaría la misma incógnita en ambas ecuaciones y las igualaría, obteniendo el valor de una de ellas y luego, reemplazaría ese valor en alguna de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.

Página 79

- Para verificar la solución obtenida en el **Ejemplo 1**, se podría utilizar el método gráfico.

Página 81

- Ecuaciones de primer grado, números racionales, operatorias combinadas, entre otros.
- Podrían mencionar que preguntando a sus pares o analizando las estrategias propuestas en el texto.
- Podrían mencionar que no, ya que utilizaron las estrategias aprendidas.
- Un sistema de ecuaciones puede resolverse a través del método gráfico o de igualación. Para el método gráfico se deben obtener al menos dos puntos de cada ecuación y dibujar las rectas en el plano. Para el método de igualación se debe despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita para luego igualarla y obtener el valor de una incógnita, que se usará para obtener el valor de la otra reemplazando su valor en alguna de las dos ecuaciones.

Página 82

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de sustitución

- $A + B = 10$ y $20\,000A + 70\,000B = 250\,000$.
- Podrían mencionar el método de igualación u otro estudiado.
- Se espera que pudieran introducir el método de sustitución: tomar una ecuación y despejar una incógnita, luego reemplazarla en la otra ecuación para así despejar el valor de una incógnita. Luego, reemplazar ese valor en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.
- Se espera que sí, ya que esto da espacio a aplicar diversas estrategias y formas de aprender.

Página 84

- Es aquel en que se despeja una incógnita para luego reemplazarla en la otra ecuación para obtener los valores de las incógnitas.
- Se espera que relacionen este contexto con el estudio de sistemas lineales y justifiquen su respuesta a partir de esto.
- Podrían mencionar ir comparando con los métodos anteriores, más ejercitación, entre otros.
- Se espera que mencionen que sí, ya que les permiten ir revisando lo que han realizado en el desarrollo de la unidad.

Página 86

Resolución de sistemas de ecuaciones: método de reducción

- $x + 8y = 64$ y $x + 10y = 30$.
- Si se restan los coeficientes correspondientes de las ecuaciones, la incógnita x desaparece y queda una ecuación con una sola incógnita, por lo que se puede obtener el valor de y. Luego, se reemplaza el valor de y en cualquiera de las ecuaciones y se obtiene el valor de x.
- Sí funcionará en cualquier sistema de ecuaciones, incluso en aquellos en que los coeficientes numéricos de ambas incógnitas sean diferentes, porque se pueden amplificar para igualar los coeficientes.

Página 88

1. Amplificar una o las dos ecuaciones para que alguna de las incógnitas quede con el mismo coeficiente numérico en ambas ecuaciones.
2. Restar las ecuaciones, para que una incógnita desaparezca y se pueda obtener el valor de la otra incógnita.
3. Reemplazar el valor de la incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la segunda incógnita.

- Que con él se pueden resolver distintas problemáticas cotidianas y se pueden resolver de diferentes maneras, ya sea a través del método gráfico, de igualación, de sustitución o de reducción.

Página 89

Para finalizar la Lección 2

- Los sistemas de ecuaciones son útiles para representar, analizar y resolver diferentes problemas.
- Podrían mencionar otras áreas o situaciones en que se utilicen los sistemas de ecuaciones, otros métodos de resolución, etc.
- Podrían mencionar que, resolviendo problemas hasta encontrar la solución correcta, buscando diversas estrategias para resolver y comprobar las soluciones obtenidas, entre otras.

Página 90

Síntesis de Unidad 2 • Álgebra y funciones

Lección 1 • Productos notables

Aprendiste...

- Se espera que mencionen sí, al buscar distintas estrategias para resolver los problemas relacionados con producto notables propuestos en la Lección 1.

Lograste...

- Se espera que hayan podido exponer ideas y opiniones con fundamentos a partir de los estudiado en la lección, expresándose de manera oral y escrita, con distintas representaciones y usando un lenguaje matemático.

Página 91

Lección 2 • Sistemas de ecuaciones lineales

Aprendiste...

- Como en la lección se proponen distintas instancias de trabajo entre pares, se espera que todos hayan podido participar de manera responsable, proactiva y respetuosa.

Lograste...

- Se espera que sí, ya que en todas las instancias de aprendizaje propuestas en la lección se potencia este tipo de resolución de problemas.

Unidad 3 • Geometría

Página 93

1. Está al centro de la base de la Torre del Reloj.
2. Tres paralelepípedos que van disminuyendo su tamaño con la altura. Además, cada paralelepípedo de la torre tiene arcos ojivales y pórticos.
3. Sí, algunas figuras que se repiten en forma y tamaño son: los arcos ojivales, los pórticos y las circunferencias del reloj.
4. Sí, por ejemplo: los arcos, los pórticos de los escalones, etc.
5. Sí, por ejemplo: los arcos ojivales y los pórticos de cada escalón.

Habilidades del siglo XXI

- Respuesta variada. Por ejemplo, los pasillos del colegio.
- Respuesta variada. Podrían dibujar los pasillos del colegio.
- Se espera que mencionen la definición de punto de fuga.

Conocimientos previos

- Respuesta variada. Podrían mencionar no comprender la definición de punto de fuga y necesitar visualizar más ejemplos.

Página 94

Lección 1 • Homotecia

Concepto de homotecia y propiedades

- OC representa la distancia entre la persona y el pilar BC, la cual mide 16 m.

  OD representa la distancia entre la persona y el pilar AD.
- $\frac{OD}{OD'} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ y $\frac{OC}{OC'} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$, dado que la medida entre OD' y OC' son iguales, la relación entre los cocientes también es igual.
- Se espera que concluyan que se da la misma relación que en la pregunta anterior.
- Sí, ya que un factor para serlo es que se minimice la alteración y se maximice la eficiencia del lugar. Con esta construcción se mejora la percepción visual contribuyendo a su integración armoniosa con el entorno.

Página 95

- Se pueden ver en todo tipo de cosas que se puedan asociar a escala, por ejemplo: al imprimir fotos; al hacer la maqueta de un puente, al dibujar los planos de una casa, entre otros.
- Significaría que ambas figuras son congruentes, esto es que son del mismo tamaño y tienen la misma forma.

Página 96

- Si la razón de homotecia (k) fuera 0,5, significaría que la figura original es el doble de tamaño que la figura imagen.

Página 99

- En el proceso de visión se desarrolla una homotecia inversa con $1 < k < 0$, ya que se obtiene una figura de menor tamaño a la original y el centro de homotecia se encuentra entre la figura original y la retina.
- Podrían mencionar que permiten visualizar las situaciones de homotecia para comprenderlas.

Página 101

- Es incorrecto afirmar que el triángulo ABC triplicó su tamaño, ya que lo duplicó. La razón de homotecia es –2, lo que quiere decir, que el centro de homotecia está entre ambas figuras y que el triángulo imagen es el doble que el triángulo original.
- No se mantiene, ya que ahora el triángulo original sería el doble que el triángulo imagen, por lo tanto, la razón de homotecia sería –0,5.

Página 102

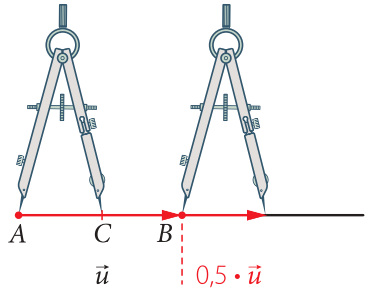
Homotecia vectorial

- Respuesta variada, podrían nombrar distintas comunas en la que es posible ver torres eléctricas en las calles.
- Se refiere a que la estructura de la torre es equilibrada, sus figuras tienen la misma forma, posición y tamaño.
- La homotecia es una transformación geométrica donde una figura original se reduce, amplía o mantiene de tamaño, obteniendo como resultado otra figura.
- Se puede reconocer homotecia en los triángulos, ya que mantienen su forma, pero el tamaño va disminuyendo mientras aumenta la altura de la torre.
- En la imagen se pueden observar varias homotecias. Por ejemplo: las mismas torres, algunas tienen la misma forma, pero diferente tamaño; las crucetas, los cuerpos de las torres, entre otros.

Página 103

- La principal diferencia es que el vector $2\vec{u}$ es el doble de tamaño que el vector $\vec{u}$.
- Para representar el vector $0{,}5 \cdot \vec{u}$ usando regla y compás se debe:

1. Medir con la regla el vector $\vec{u}$ y marcar con un punto su mitad (punto C).
2. Trazar un segmento con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{u}$.
3. Poner el compás con centro en A y radio $\overline{AC}$.
4. Poner el compás en el inicio del segmento y replicar la amplitud del vector $\overrightarrow{AC}$, obteniendo el vector $0{,}5 \cdot \vec{u}$.



Página 104

- Si cambia el centro de homotecia, el vector mantendrá la longitud, dirección y el sentido, lo único que cambiará será la ubicación.
- El vector $\overrightarrow{CD}$ tiene la misma longitud que el vector $-\overrightarrow{CD}$, pero tienen diferente dirección y sentido. Si comparamos el vector $-\overrightarrow{CD}$ con el vector $-2\overrightarrow{CD}$, ambos tienen la misma dirección y sentido, lo que cambia es la longitud, ya que el segundo es el doble del primero.

Página 105

- Se ubicaría en el cuadrante III, ya que el centro de homotecia estaría entre ambas figuras.
- Trazaría los vectores desde el centro de homotecia a cada uno de los vértices, luego multiplicaría cada vector por el escalar y obtendría como resultado las coordenadas de los nuevos vértices.
- La visualización ayuda a comprender mejor los contenidos porque permite tener una representación visual más clara, lo que facilita la comprensión haciendo el problema más tangible.

Página 107

- Es el vector resultante de multiplicar un vector $\overrightarrow{PA}$ por un escalar k.
- Respuesta variada. Podrían mencionar que se atrevieron a dar ejemplos y resolver los problemas.

Para finalizar la Lección 1

- Se espera una respuesta afirmativa, mencionando situaciones como, resolver un problema usando diversas estrategias, participar en las discusiones de clases, etc.
- Se espera que asocien las representaciones como un aporte a la visualización de las homotecias.
- Podrían mencionar que al ver graficada la información, comprendieron algunos problemas.
- Se espera una respuesta afirmativa, explicando situaciones vividas al resolver los problemas.
- Se espera una respuesta afirmativa. Por ejemplo, en construcciones, mediciones de terrenos, entre otras.

Página 108

Lección 2 • Semejanza

Semejanza de figuras

- Se puede observar que todos miran hacia la misma dirección y la forma y el tamaño de cada uno es bastante similar.
- A pesar de que son bastante similares, no son exactamente iguales, tienen detalles que los diferencian. Por ejemplo: el largo de la cara o cuerpo, tallado de la nariz, orejas, boca, entre otros.
- Para determinar la medida del ancho de la réplica, se debe usar proporciones. Si la proporción entre la altura es: $\frac{150}{100} = \frac{3}{2}$, la del ancho debiese ser igual: $\frac{3}{2} = \frac{80}{\textit{ancho réplica}}$; por lo tanto, el ancho de la réplica debiese ser 53 cm, aproximadamente.
- Se espera que comenten acerca de acciones que ayudan a la preservación y conservación de los patrimonios culturales y naturales como, no tocar los lugares protegidos, no botar basura, respetar las normas instaladas en cada lugar, entre otras.

Página 110

- Algunas acciones que promueven y apoyan proyectos de diseño urbano sostenible que integren la reutilización de materiales y la práctica de la semejanza de figuras en su planificación y ejecución pueden ser: la construcción con ecoladrillos y de jardineras con neumáticos, la creación de vitrales coloridos con vidrios reutilizados, entre otros.

Página 111

- Dos figuras son semejantes cuando tienen exactamente la misma forma.
- Se relacionan ya que en la homotecia se obtienen dos figuras semejantes, porque ambas tienen la misma forma.
- Sí, ya que tienen la misma forma. La razón de semejanza sería 1, ya que al ser figuras congruentes tienen el mismo tamaño.
- No, ya que son figuras con igual forma, pero no necesariamente con igual tamaño.

- Respuesta variada, se espera que mencionen alguna situación en que argumentaron y explicaron de manera clara.

Página 112

Criterios de semejanza de triángulos

- Sí, porque las medidas de los segmentos cumplen la siguiente proporción:

$$\frac{FH}{CB} = \frac{GH}{AB} = \frac{1}{2}$$

- Se requiere conocer la medida del segmento AC, ya que es el segmento correspondiente al segmento GF y debiera cumplir la siguiente proporción: $\frac{GF}{AC} = \frac{1}{2}$.
- Sí son semejantes, porque la medida de sus ángulos correspondientes es la misma y las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales, es decir, $\frac{FH}{CB} = \frac{GH}{AB} = \frac{GF}{AC} = \frac{1}{2}$.

Página 114

- LAL: dos triángulos son semejantes cuando dos lados correspondientes son proporcionales y el ángulo comprendido entre ambos lados, son de igual medida.

  LLL: dos triángulos son semejantes cuando sus tres lados correspondientes son proporcionales.
- Para justificar que los triángulos equiláteros son semejantes, se puede utilizar cualquier criterio de semejanza.

  LAL: dado que todos los lados son iguales, tendrán dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido será 60° en ambos triángulos.

  LLL: dado que todos los lados son iguales, serán proporcionales.

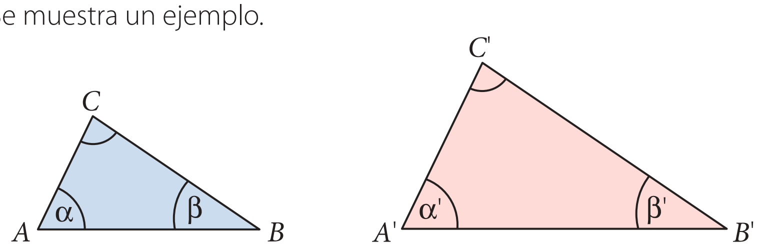
  AA: dado que todos los ángulos interiores miden 60°, tendrán dos ángulos iguales.
- Respuesta variada. Se espera que mencionen algunas estrategias propuestas por ellos y los argumentos para aplicarlas.

Página 116

- Si se tienen menos datos de los triángulos, se puede utilizar el Teorema de Pitágoras, en el caso de triángulos rectángulos. En otro caso, podría medirse la sombra que genera la persona y el árbol para poder obtener más datos y ver si son o no semejantes.

Página 117

- Por ejemplo: al decorar un espacio de la casa, al interpretar los mapas, al hacer maquetas de un puente, entre otros.
- Respuesta variada. Se muestra un ejemplo.



  LAL: Si $AB = 7$ cm; $AC = 3$ cm; $\alpha = 60°$; $A'B' = 14$ cm; $A'C' = 6$ cm; $\alpha' = 60°$, se puede concluir que por el criterio de semejanza lado, ángulo, lado los triángulos son semejantes.

  LLL: Si $AB = 7$ cm; $AC = 3$ cm; $BC = 6$ cm; $A'B' = 14$ cm; $A'C' = 6$ cm; $B'C' = 12$ cm, se puede concluir que por el criterio de semejanza lado, lado, lado los triángulos son semejantes.

  AA: Si $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$, $\alpha' = 60°$, $\beta' = 50°$ se puede concluir que por el criterio de semejanza ángulo, ángulo los triángulos son semejantes.

- Respuesta variada. Se espera que con la pregunta anterior lo hayan podido aclarar.
- Respuesta variada. Podrían mencionar reforzar alguno de los criterios, si presentan dificultades.

Página 118

Teorema de Euclides

- En la imagen 1, la pared ($\overline{AC}$) forma un ángulo recto con el suelo ($\overline{BC}$) en el punto C, formándose un triángulo rectángulo con la pared, el suelo y la escalera (ΔABC), en la imagen 1 también se forma el ΔBCD y el ΔADC que son rectángulos.
- ; y en la imagen 2, la base del árbol forma un ángulo recto con el suelo en el punto D, formándose dos triángulos rectángulos, ACD y CBD. En la imagen 2 también se forma el ΔABC que es rectángulo.
- Con el teorema de Pitágoras: $(\overline{AB})^2 - (\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2$.
- ACD y CBD son triángulos semejantes por el criterio AA, ya que ambos tienen un ángulo recto en D, el ángulo en A tiene igual medida que el ángulo DCB y el ángulo en B tiene igual medida que el ángulo ACD. El ΔABC es semejante con el ΔACD y ΔCBD por el criterio AA, ya que los tres tienen un ángulo recto, el ángulo en A tiene igual medida que el ángulo DCB y el ángulo en B tiene igual medida que el ángulo ACD.
- En ambos casos, usaría el teorema de Pitágoras y/o el teorema de Euclides.
- Podrían mencionar que sí, a partir de las respuestas anteriores.

Página 123

Para finalizar la Lección 2

- Podría resolver problemas relacionados a: homotecia, semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras y teorema de Euclides.
- Dos figuras son semejantes cuando tienen exactamente la misma forma.
- Se espera que mencionen algún procedimiento realizado, utilizando simbología y lenguaje matemático.
- Se espera que mencionen que siempre buscaron estrategias para resolver los problemas.
- Los modelos geométricos apoyan visualizando de mejor manera las situaciones problema.

Página 124

Síntesis de Unidad 3 • Geometría

Lección 1 • Homotecia

Aprendiste...

- Respuesta variada. Se espera que la gran mayoría de los estudiantes respondan de modo afirmativo y mencionen algunas situaciones en las que ayudaron a un compañero a comprender conceptos en los que tenía dificultades.

Lograste...

- Respuesta variada. Se espera que recuerden los contextos reales de los problemas abordados en la lección y cómo buscaron estrategias para resolverlos.
- Respuesta variada. Se espera que mencionen cómo buscaron estrategias para resolver los problemas presentados en la lección.

Página 125

Lección 2 • Semejanza

Aprendiste…

- Se espera que respondan que sí y mencionen algunas situaciones como intentar resolver problemas hasta que las soluciones fueran correctas.

Lograste…

- Podrían mencionar las estrategias que propusieron para resolver los distintos problemas planteados en la lección.
- Se espera que valoren el trabajo en equipo y la importancia de este para alcanzar algunas metas.

Unidad 4 • Probabilidad y estadística

Página 127

1. Debe ser mayor a 140/90 mm Hg.
2. Sobre 126 mg/dl en ayunas y 200 mg/dl dos horas después de comer. La persona podría tener pre-diabetes, ya que su registro de glicemia se encuentra entre los valores 100 mg/dl y 125 mg/dl, y es menor que 140 mg/dl.

Habilidades del siglo XXI

- Ayudan a recopilar y analizar datos, evaluar la probabilidad de enfermedades, ver la efectividad de vacunas y tratamientos, etc.
- De acuerdo a la medición realizada, la persona podría tener pre-diabetes, por lo que debería mejorar sus hábitos alimenticios y mantener un estilo de vida saludable como estrategia para prevenir la diabetes.

Conocimientos previos

- Respuesta variada. Podrían mencionar interpretar el dato registrado en la imagen de acuerdo con la información recopilada en los sitios web.

Página 128

Lección 1 • Análisis de poblaciones

Registro de distribuciones

- Sí, ya que el sueño es muy importante para la salud mental y física, ayudando a tener mejor resistencia, estar más concentrado y evitar lesiones, ayuda en la recuperación de los músculos, etc.
- Debe tener 7 horas de sueño aproximadamente, porque estará mejor mentalmente, tendrá más resistencia, estará más concentrado, etc.
- La frecuencia cardiaca en reposo difiere con la de entrenamiento, ya que la primera es mucho más baja que la segunda. En la imagen, en reposo es 62 latidos por minuto, mientras que en entrenamiento, varía entre 90 y 130 latidos por minuto.

Página 133

- La visión, la audición, la masa muscular, la velocidad del metabolismo, entre otros.
- Se espera que los resultados de los hombres sean mayores en estatura que las mujeres, ya que los hombres suelen presentar una mayor estatura que las mujeres.

Página 134

Comparación de dos poblaciones

- Conjunto de especies que interactúan en un lugar determinado.
- Podrían mencionar cualquier Parque Nacional. Para saber más acerca de los Parques Nacionales de Chile, puede acceder a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT1MTEAN_91_1*
- En el tipo de vegetación presente, el clima, la fauna, entre otros.

Página 135

- Lo que diferencia al Bosque Adulto del Renoval es que el primero se reproduce de manera natural y el segundo por alguna catástrofe, haciendo que el Bosque Adulto sea heterogéneo versus el Renoval que es homogéneo.

Página 136

- Sí, es correcto afirmar que la nube de puntos de los hombres tiene un punto aislado, el (32, 31) que muestra un comportamiento muy distinto al de los demás.

Página 139

Para finalizar la Lección 1

- Sí, porque permiten comparar características de manera visual.
- Se espera que respondan que sí, ya que eso se estudió en la lección.
- Podrían mencionar que al analizar la información siempre es de manera crítica.
- Los datos cuantitativos aportan en la comprensión de la realidad social porque entregan mediciones objetivas, que ayudan en la toma de decisiones informada y eficiente.
- Se espera que respondan que sí.
- Por ejemplo, en temas relacionados con la salud, con el medioambiente, con las finanzas, entre otros.

Página 140

Lección 2 • Reglas de la probabilidad

Unión e intersección de eventos

- En todos sus ámbitos, ya sea desde el estado de ánimo hasta cómo enfrenta las situaciones de su vida diaria.
- Se puede concluir que los síntomas de ansiedad se mantienen relativamente constante al pasar el tiempo, los problemas de salud mental tienen alzas y bajas, tanto el estado de ánimo de las personas como los síntomas de depresión van disminuyendo.
- A partir del porcentaje. Por ejemplo, en abril 2023 era 13,7%. El número se divide en 100 y resulta la probabilidad (0,137).
- Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una persona que tenga síntomas de ansiedad en noviembre 2022?, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una persona que tenga problemas de salud mental en noviembre 2020?, entre otras.
- Identificaría todas las combinaciones posibles de las 4 variables ($SA - PSM$, $SA - EA$, $SA - SD$, $PSM - EA$, $PSM - SD$, $EA - SD$). Considera que Síntomas de ansiedad (SA), Problemas de salud mental (PSM), Estado de ánimo (EA) y Síntomas de depresión (SD).

Página 141

- El diagrama de Venn facilita el cálculo de probabilidades porque permite visualizar de mejor manera los conjuntos e identificar las uniones e intersecciones para resolver de mejor manera los problemas.

Página 143

- Se puede observar 1 manera posible con 0 enfermos, 4 maneras posibles de 1 enfermo, 6 maneras posibles con 2 enfermos y 1 manera posible con 4 enfermos.
- $\frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
- Por ejemplo, para visualizar las alternativas de cara y sello al tirar cuatro monedas, para visualizar las alternativas de mujeres y hombres en tres generaciones, para visualizar opciones en un restaurante de plato de fondo y entradas, entre otros.
- Se debe cumplir que ambos conjuntos sean idénticos.
- Generalmente, la unión tiene más elementos que la intersección, ya que la unión incluye los elementos de ambos. Esto no se da cuando ambos conjuntos son idénticos, unión e intersección tienen la misma cantidad de elementos.

Página 144

Regla aditiva de la probabilidad

- Si presencias comportamientos de acoso escolar en redes sociales se debe informar lo ocurrido a un adulto responsable porque puede manejar de mejor manera la situación, interviniendo a tiempo, evitando que suceda a más personas, entre otros.
- $\frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{116}{1\,000} = \frac{29}{250}$

Página 145

- Probabilidad de la unión de tres eventos disjuntos: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

  Probabilidad de la unión de tres eventos no disjuntos:

  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Página 146

- Podrían mencionar cualquiera de los pasos. Por ejemplo, el cálculo de la probabilidad de cada evento.
- $\Omega = \Omega \cup \varnothing$; $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing)$; $1 = P(\Omega) + P(\varnothing)$; $1 = 1 + P(\varnothing)$; $0 = P(\varnothing)$.

Página 147

- Podrían mencionar cualquiera de los pasos. Por ejemplo, el cálculo de la probabilidad de cada evento.
- Podrían mencionar: resolviendo más problemas, trabajando con sus pares, revisando información en la web, entre otras.

Página 148

1. Identificar los eventos.
2. Determinar si los eventos son o no disjuntos.
3. Calcular la probabilidad según la fórmula correspondiente.
4. Responder la pregunta.

- Se espera que mencionen que sí, ya que contrastaron ejemplos e información, comprobaron resultados, entre otras.
- Se espera que mencionen que sí, ya que pudieron informarse y comprender algunos eventos sociales de su alrededor.
- Podrían mencionar cualquier paso y que ejercitando al resolver distintas situaciones similares se van corrigiendo.

Página 150

Regla multiplicativa de la probabilidad

- Para tomar mejores decisiones, evaluar correctamente la situación, disminuir riesgo, entre otros.
- Sí, ya que las mujeres son las que pueden estar embarazadas y la edad fértil está entre los 15 a 49 años.
- Se utilizan en muchos ámbitos para poder analizar datos, por ejemplo: para predecir el clima, en juegos de azar, para calcular el riesgo, para calcular inversiones, entre otros.
- Se utilizaron conocimientos previos de probabilidades de eventos.

Página 151

- El problema debe incluir que sucedan 2 eventos independientes, como en el **Ejemplo 1**, debía ganar la primera y la segunda competencia.
- Si se consideran dos escenarios posibles, ganar o perder la competencia, es correcto, porque la probabilidad de ganar es 0,7 y la probabilidad de ganar y la de perder deben sumar 1. Por lo tanto, la probabilidad de perder se puede calcular como $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
- Se definen los siguientes eventos independientes y su probabilidad: C: perder en la primera competencia, $P(C) = 0{,}3$ y D: perder en la segunda competencia, $P(D) = 0{,}3$, entonces la probabilidad de que la persona pierda en ambas competencias es $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.
- La persona puede ganar la primera competencia (A) y perder en la segunda competencia (D) o perder la primera competencia (C) y ganar la segunda competencia (B). En ambas opciones la probabilidad es la misma, $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$ y $P(C \cap B) = P(C) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$. Entonces, la probabilidad de la unión de estos eventos es $P((A \cap D) \cup (C \cap B)) = P(A \cap D) + P(C \cap B) = 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42$.

Página 153

- La probabilidad de la intersección de dos eventos es igual al producto de las probabilidades cuando los eventos son independientes, es decir, cuando uno no afecta la probabilidad del otro.
- El diagrama de Venn puede ser mejor para visualizar intersecciones, pero más difícil si tiene muchas etapas. El diagrama de árbol permite visualizar mejor cuando tiene varias etapas, pero más difícil de ver intersecciones.

Página 155

- 3 personas enfermas. Calcularía:
  1. Probabilidad de 3 personas enfermas y 1 sana: $P(E) \cdot P(E) \cdot P(E) \cdot P(S) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064$.
  2. Cantidad de opciones que se puede dar 3 personas enfermas y 1 sana: (S_1, E_2, E_3, E_4), (E_1, S_2, E_3, E_4), (E_1, E_2, S_3, E_4), (E_1, E_2, E_3, S_4).
  3. Suma la probabilidad de cada opción. $(0{,}0064 + 0{,}0064 + 0{,}0064 + 0{,}0064 = 0{,}0256)$.

  1 persona enferma. Calcularía:
  1. Probabilidad de 1 persona enferma y 3 sanas: $P(E) \cdot P(S) \cdot P(S) \cdot P(S) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}1024$.
  2. Cantidad de opciones que se puede dar 1 persona enferma y 3 sanas: (S_1, S_2, S_3, E_4), (S_1, S_2, E_3, S_4), (S_1, E_2, S_3, S_4), (E_1, S_2, S_3, S_4).
  3. Suma la probabilidad de cada opción $(0{,}1024 + 0{,}1024 + 0{,}1024 + 0{,}1024 = 0{,}4096)$.

- Un diagrama de árbol permite representar un experimento aleatorio de varias etapas. Se pueden asignar probabilidades en cada etapa considerando la ocurrencia de la etapa anterior, es decir, verificando si los resultados entre etapas son independientes. La probabilidad de una rama del árbol se obtiene como el producto de las probabilidades sucesivas obtenidas en cada etapa, es decir, se aplican las reglas multiplicativas de la probabilidad. Las ramas de un diagrama de árbol representan eventos disjuntos entre si, por lo que la probabilidad de la unión de estos eventos es la suma de las probabilidades, es decir, se aplican las reglas aditivas de la probabilidad.

Para finalizar la Lección 2

- La regla aditiva y multiplicativa de la probabilidad. La regla aditiva se usa para calcular la probabilidad de unión de dos eventos disjuntos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. La regla multiplicativa se usa para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Podrían mencionar conocer otros tipos de variables y cálculo de probabilidades aplicados a diversos contextos.
- Probabilidad de eventos y operatoria con números racionales.
- Podrían mencionar que sí, que fue mejorando la comunicación de ideas a partir de la discusión constante con sus pares en los distintos problemas resueltos.

Página 156

Síntesis de Unidad 4 • Probabilidad y estadística

Lección 1 • Análisis de poblaciones

Aprendiste...

- El uso de la tecnología facilita la elaboración de gráficas con muchos datos. Si los datos pertenecen a personas, deben ser tratados con discreción, cuidando la privacidad.

Lograste...

- Algunas situaciones fueron: la relación entre el índice de masa corporal y las horas de sueño; relación de enfermedad coronaria y tipo de comportamiento; relación edad e índice de masa corporal en mujeres y hombres, entre otros.
- Por ejemplo, la relación entre las horas de estudio y las notas obtenidas; relación entre el deporte realizado y la cantidad de calorías quemadas; relación entre la cantidad de cigarros diarios fumados y enfermedades pulmonares, entre otros. Es importante comparar variables en dos poblaciones porque permite ver diferencias, ayuda en la toma de decisiones, detectar patrones, entre otros.

Página 157

Lección 2 • Reglas de la probabilidad

Aprendiste...

- Se espera que los estudiantes valoren el aporte de la obtención de datos cualitativos para comprender la realidad social, y hayan evaluado la pertinencia de estos, a partir del contexto.

Lograste...

- El uso de fórmulas en el cálculo de probabilidades permite calcularlas de manera más simple y eficiente. Es importante al usar fórmulas, entender qué se está calculando.
- Respuesta variada. Podrían mencionar determinar la cantidad de ramas y hojas para cada situación.

El Texto del Estudiante **Matemática 1º medio** es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Cristian Gúmera Valenzuela

COORDINACIÓN EDITORIAL
Álex Ortega Toledo

COORDINACIÓN DE PROYECTOS DIGITALES
Manoli Camacho Ángeles

JEFATURA DE ÁREA
Patricio Loyola Martínez

EDICIÓN
Melissa Silva Pastén

ASISTENCIA DE EDICIÓN
Rafael Arancibia Rojas

AUTORÍA
Vivian Marambio Fuentes
Alejandro Sepúlveda Peñaloza
Melissa Silva Pastén

ASESORÍA PEDAGÓGICA
Claudia Vásquez Ortiz

ASESORÍA EN ESTRATEGIAS LEC PARA APRENDER
Ximena González Vargas
Álex Ortega Toledo

ASESORÍA EN PUEBLOS ORIGINARIOS
Priscila Duath Sepúlveda
Pedro Prado Verdejo

COORDINACIÓN GRÁFICA
Sergio Pérez Jara

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Mariela Pineda Gálvez

FOTOGRAFÍAS E ILUSTRACIONES
Wikimedia Commons
Shutterstock
Gettyimages

CORRECCIÓN DE ESTILO
Alejandro Cisternas Ulloa

DOCUMENTACIÓN
Cristian Bustos Chavarría

PRODUCCIÓN
Rosana Padilla Cencever

Andrés Bello 2299 Piso 10, oficinas 1001 y 1002, Providencia, Santiago (Chile).
ISBN: 978-956-15-3990-7
Inscripción Nº: 2024-A-11088
Se terminó de imprimir esta 1ª edición de 259.666 ejemplares en el mes de Enero del año 2025.
Impreso en Chile por A Impresores.
www.santillana.cl

GUÁRDALO EN UN LUGAR ADECUADO

CUIDA SUS HOJAS Y NO DOBLES SUS ESQUINAS

ÚSALO ALEJADO DE COMIDAS Y BEBIDAS

NO LO RAYES NI SUBRAYES

TÓMALO CON CUIDADO

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

SANTILLANA

9 789561 539907