REUTILIZABLE
TEXTO ESCOLAR

2° Medio

Texto del Estudiante

MATEMÁTICA

Carlos Castro M. • Daniel Catalán N. • Pablo León V. • Alejandro Sepúlveda P.

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

SANTILLANA

Escalera en espiral de metal rojo, China. El diseño de la espiral se basa en la sucesión matemática de Fibonacci para el logro de proporciones armónicas en su construcción.

Texto del Estudiante

MATEMÁTICA

2° Medio

Carlos Castro Maldonado
Licenciado en Matemática
Pontificia Universidad de Católica de Chile

Daniel Catalán Navarrete
Licenciado en Ciencias de la Ingeniería
Ingeniero Civil Químico
Universidad de Chile

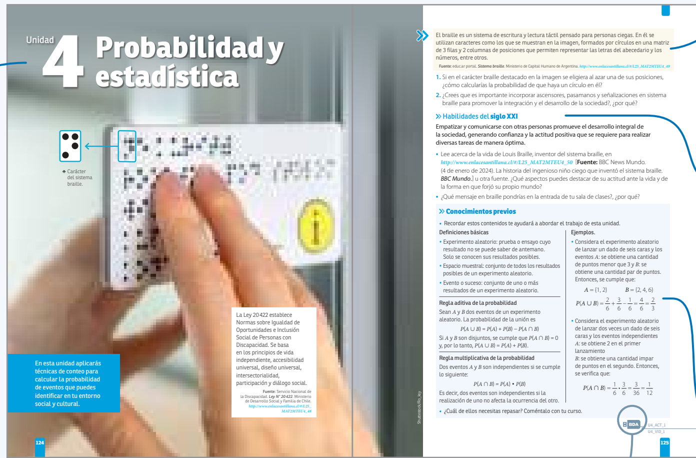
Pablo León Velasco
Profesor de Educación Media en Matemática
Licenciado en Educación Media
Universidad Andrés Bello

Alejandro Sepúlveda Peñaloza
Licenciado en Matemática
Magíster en Estadística
Doctor en Estadística Pontificia
Universidad Católica de Chile

Estructura gráfica

El Texto del Estudiante **Matemática 2º medio** está organizado en cuatro unidades. En cada una podrás encontrar lo siguiente:

Inicio de unidad



Nombre y número de unidad

Se relaciona con el eje temático que se desarrollará en la unidad.

Sección inicial motivadora

Se relaciona con los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) y con las Actitudes del nivel.

Habilidades del siglo XXI

Se desarrollan para que las y los jóvenes habiten integralmente en la sociedad del conocimiento.

Conocimientos previos

Se relacionan con los contenidos de cursos anteriores que serán utilizados para impulsar el desarrollo de los nuevos aprendizajes.

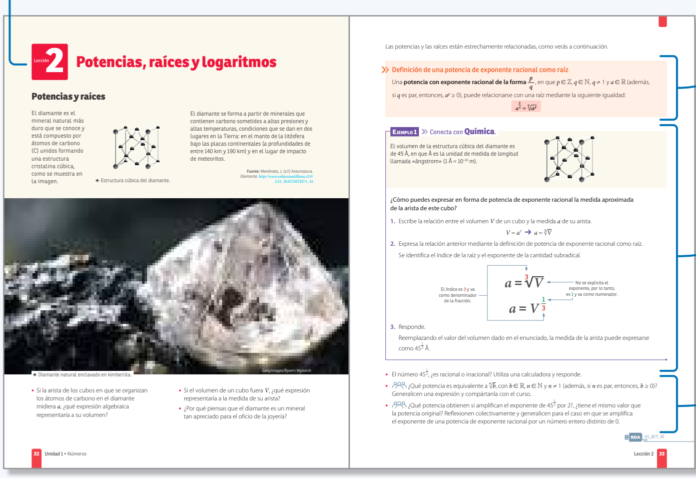
BDA (Banco Digital de Actividades) BDA

Articulación con el BDA para reforzar, ejercitar, profundizar, complementar, afianzar e integrar los nuevos aprendizajes.

Lecciones

Al inicio de cada lección se proponen temas que invitan a la reflexión y motivan a aprender los contenidos que se verán a continuación. Son, además, una instancia para reconocer ideas previas que servirán para un aprendizaje integral de la matemática.

Nombre y número de lección



Formalización

Enunciados y síntesis de conceptos relevantes para el aprendizaje. Puede guiar el modelamiento o ubicarse después de la etapa exploratoria.

Ejemplos

Ejemplos y modelamientos explicados paso a paso para resolver problemas y responder a requerimientos variados.

Preguntas motivadoras

Preguntas individuales y grupales para estimular la reflexión y la comprensión de los nuevos conocimientos y habilidades.

Secciones especiales

Pueblos Originarios

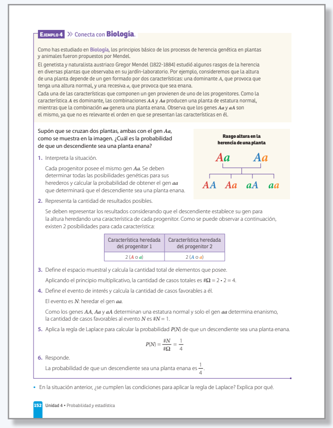
Contextos que promueven el respeto y la valoración de la diversidad que representan los Pueblos Originarios.

Educación ambiental

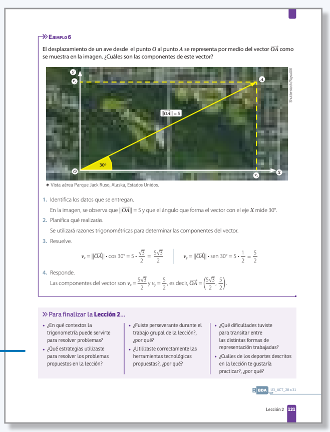
Contextos que fomentan el desarrollo de hábitos que contribuyen al cuidado del medioambiente y al respeto por todos los seres vivos.

Interdisciplinariedad

Interrelaciones que conectan los nuevos aprendizajes con los contenidos y habilidades de otras asignaturas para lograr su comprensión integral.

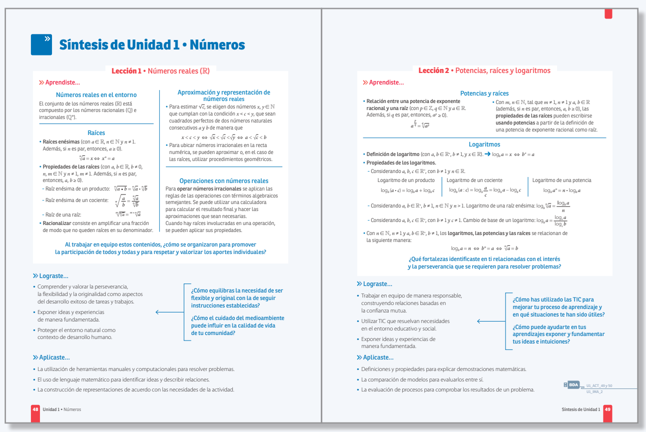


- Instancia **metacognitiva** al final de cada lección que invita a reflexionar sobre el propio aprendizaje, sus dificultades y su uso en la sociedad.



Síntesis

Sección al final de cada unidad que destaca los conocimientos, habilidades, actitudes y Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) desarrollados, y propone preguntas para fomentar la metacognición.

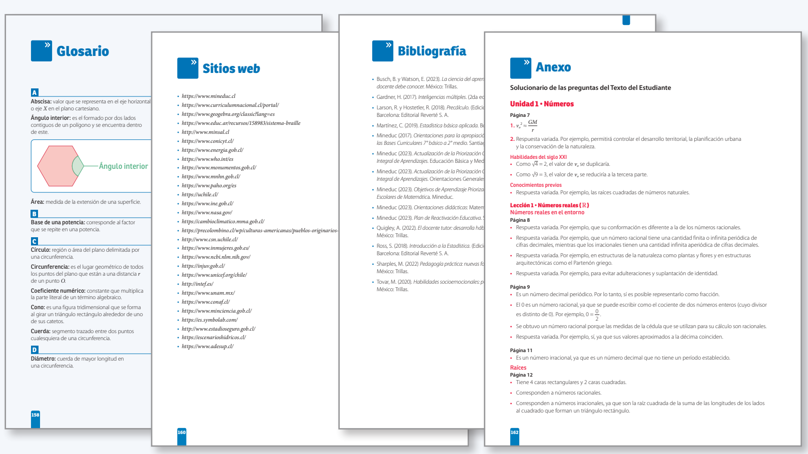


Páginas finales

Glosario | Sitios *web* | Bibliografía | Anexo

Secciones con la definición de algunos de los conceptos básicos trabajados, con los sitios *web* que puedes visitar y con los libros que puedes consultar.

En el Anexo se presentan las respuestas a las preguntas motivadoras que se proponen a lo largo del texto.



Índice

Unidad 3 Geometría 90

Unidad 4 Probabilidad y estadística 124

Unidad 1 Números

El satélite chileno FASat-Delta fue puesto en órbita el 12 de junio de 2023 por el vehículo de lanzamiento Falcon 9 de la empresa SpaceX.

En esta unidad trabajarás con los números reales realizando cálculos y estimaciones para relacionarlos con las nuevas tecnologías, la ciencia y otras áreas de interés.

WikimediaCommons/Official SpaceX Photos(editado)

Fuente: Gobierno de Chile (12 de junio de 2023). *¡Exitoso lanzamiento del satélite chileno FASat-Delta!* *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_2*

Para mantenerse en órbita, un satélite tiene que desplazarse a una elevada velocidad, que variará dependiendo de su altura. Para poner en órbita al FASat-Delta, la nave Falcon 9 debió adquirir la velocidad orbital del satélite, cuya magnitud se puede calcular como $v_o \approx \sqrt{\frac{GM}{r}}$, en que $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2} es la constante de gravitación universal; $M \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra y $r \approx 6\,371\,000$ m es la longitud de su radio.

1. ¿Cómo determinarías el valor de v_o^2? Explica al curso.

2. ¿Qué beneficios para nuestro país tiene la puesta en órbita de su red de satélites?

Habilidades del **siglo XXI**

En internet existen múltiples herramientas que permiten entender y manejar información. Utiliza una calculadora científica *online* o una manual para comprobar que $v_o \approx 7\,906$ m/s.

- ¿Cómo cambiaría el valor de v_o si la masa de la Tierra correspondiera al cuádruplo de su valor real?
- ¿Cómo cambiaría el valor de v_o si la longitud del radio de la Tierra fuera 9 veces su valor real?

Calculadora científica *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_1

Conocimientos previos

- Recordar estos contenidos te ayudará a abordar el trabajo de esta unidad.

Potencias

Sean a y b números enteros distintos de 0 y n un número natural.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \underbrace{\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{b}{a}}_{n \text{ veces}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

Ejemplos.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^0 = 1$$

Raíces cuadradas de números naturales

Si a es un número natural o 0, se define $\sqrt{a} = b$ si se cumple que $b^2 = a$.

Ejemplos.

$\sqrt{0} = 0$ $\quad$ $\sqrt{2} \approx 1{,}414$

$\sqrt{144} = 12$ $\quad$ $\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{25} = 5$ $\quad$ $\sqrt{40} \approx 6{,}324$

Operaciones con números racionales

Ejemplos.

$$\frac{1}{2} + (0{,}2 \cdot 4) = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{5+8}{10} = \frac{13}{10}$$

$$0{,}\overline{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{3} : 1{,}5 = \frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

- ¿Cuál de estos conocimientos necesitas repasar? Coméntalo con tu curso.

BDA U1_ACT_1 U1_VID_1

Lección 1 Números reales ($\mathbb{R}$)

Números reales en el entorno

La cédula de identidad es el documento más importante y común en nuestro país. El primero de este tipo se creó en 1924 junto con el establecimiento del servicio de identificación obligatorio. En él se incluía el nombre, domicilio, huella dactilar y fotografía de la persona.

Fuente: Decreto Ley N° 26. Diario Oficial de la República de Chile, 18 de noviembre de 1924. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_3*

En la actualidad, la nueva generación de documentos de identidad incorpora multibiometría: huellas dactilares, rostro e iris. De esta manera, las cédulas de identidad cumplen con un mayor nivel de seguridad, convirtiéndolas en uno de los documentos más seguros del mundo.

Fuente: Portal Innova (9 de abril de 2022). *IDEMIA proporcionará a Chile una nueva generación de documentos de identidad durante los próximos 10 años.* *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_4*

En la imagen, a y b expresan las medidas en centímetros del ancho y el largo de la cédula de identidad. El valor de su razón es el número áureo φ.

$$\frac{b}{a} = \varphi$$

Gettyimages/krystiannawrocki(editado)

Las medidas del largo y del ancho de las cédulas de identidad, de las tarjetas de crédito y de otras tarjetas de uso común se relacionan de acuerdo con una razón cuyo valor es el «**número áureo**» o «número de oro», simbolizado con la letra fi del alfabeto griego (φ o Φ). Este número **irracional** determina las proporciones de muchos fenómenos y estructuras de la naturaleza y desde la antigüedad ha sido señalado como poseedor de belleza y virtud.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_5* para saber más sobre el número áureo.

- ¿Qué te sugiere el concepto de «irracional» al aplicarlo a un número?
- ¿En qué piensas que se diferencian los números irracionales de los números racionales que ya conoces?
- ¿En qué otros ámbitos has oído o leído sobre el número áureo?
- ¿Por qué crees que constantemente hay que incorporar nuevas tecnologías a las cédulas de identidad? Comenta con el curso.

EJEMPLO 1

¿Cuál es el valor de φ que puedes estimar a partir de una cédula de identidad?

a

b

1. Mide con una regla el largo b y el ancho a de una cédula de identidad.
   De manera aproximada, deberías obtener los siguientes valores:

$$b \approx 8{,}6 \text{ cm}$$

$$a \approx 5{,}4 \text{ cm}$$

2. Calcula el cociente entre las medidas del largo y del ancho con la calculadora *online*.

$$\frac{b}{a} \approx \frac{8{,}6 \text{ cm}}{5{,}4 \text{ cm}} = 1{,}592592592...$$

3. Responde.

   En este caso, una estimación de φ es $1{,}\overline{592}$.

Calculadora científica *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_6

- ¿Qué tipo de número decimal es el resultado de 8,6 : 5,4?, ¿es posible representarlo como fracción?

Números racionales y números irracionales

- Sea m un número entero y n un número entero distinto de 0. Los números que se pueden representar como $\frac{m}{n}$ se llaman **números racionales** ($\mathbb{Q}$). Por ejemplo, dado que 3 se puede representar como $\frac{3}{1}$ y 0,25 se puede representar como $\frac{1}{4}$, ambos son números racionales.
- A los números que no pueden representarse como fracciones de números enteros se les llama **números irracionales** ($\mathbb{Q}^*$). Los números irracionales corresponden a números decimales infinitos sin período. Algunos que ya conoces son los siguientes:

$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$ $\qquad$ $\sqrt{5} = 2{,}23606797...$

$\sqrt{3} = 1{,}73205080...$ $\qquad$ $\pi = 3{,}14159265...$

- El 0, ¿es un número racional o irracional?, ¿cómo lo sabes?
- Dado que φ es un número irracional, ¿por qué piensas que se obtuvo un valor racional? Comenta con el curso.
- Se atribuye al matemático griego Euclides y a la escuela pitagórica el cálculo del número φ usando la siguiente expresión:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots$$

Considerando este valor irracional, ¿piensas que $1{,}\overline{592}$ es una buena estimación para φ?, ¿por qué? Comenta con tu curso.

BDA U1_ACT_2

EJEMPLO 2

¿Qué números decimales representan a las fracciones $\frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{5}{11}$ y $\frac{10}{7}$?, ¿cómo puedes clasificarlos?

1. Para cada fracción, divide el numerador por el denominador.

Fracción	División	Cociente
$\frac{2}{5}$	2 : 5	0,4
$\frac{7}{8}$	7 : 8	0,875
$\frac{5}{11}$	5 : 11	0,45454545…
$\frac{10}{7}$	10 : 7	1,428571428571...

2. Clasifica los números y responde.

   Los números decimales y su clasificación son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{2}{5} = 0{,}4 \\ \frac{7}{8} = 0{,}875\end{array}\right] \rightarrow \text{Decimales finitos}$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{5}{11} = 0{,}45454545\ldots \\ \frac{10}{7} = 1{,}428571428571\ldots\end{array}\right] \rightarrow \text{Decimales infinitos periódicos}$$

Los números decimales que terminan en una determinada cifra decimal se denominan decimales finitos, mientras que los decimales que continúan infinitamente se llaman decimales infinitos. De los decimales infinitos, los que tienen una secuencia repetida de números se llaman decimales periódicos.

Si se representan números racionales no enteros como decimales, se convertirán en decimales finitos o decimales infinitos periódicos.

EJEMPLO 3

¿Qué número decimal representa al número irracional $\sqrt{6}$? , ¿cómo puedes clasificarlo?

1. Ingresa al link *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_87* y escribe el valor de la raíz.

$$\sqrt{6} = 2{,}44948974\ldots$$

2. Clasifica el número y responde.

   En el desarrollo de $\sqrt{6} = 2{,}44948974\ldots$ se observa que no hay período. Por lo tanto, este número corresponde a un número decimal infinito no periódico.

Ejemplo 4

La empresa chilena The Real Eco State, en colaboración con la NASA (Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio de Estados Unidos), mapea los bosques patagónicos para promover su preservación.

Fuente: Cortés, V. (9 de febrero de 2023). Innovación científica se suma a la NASA para calcular la captura de carbono en la Patagonia. *Diario Sostenible.* *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_7*

¿Cuál es el valor de π que puedes estimar a partir de la imagen del logo de la NASA? Utiliza una calculadora manual o una *online*.

1. Calcula el cociente entre el perímetro y el diámetro con la calculadora.

   Usando una regla, se obtiene que el diámetro mide $d \approx 3{,}8$ cm.

   Entonces, el cociente es $\dfrac{P}{d} \approx \dfrac{12{,}6 \text{ cm}}{3{,}8 \text{ cm}} \approx 3{,}315789....$

2. Responde.

   En este caso, una estimación de π es 3,315.

Conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)

Al conjunto formado por la unión de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y los números irracionales ($\mathbb{Q}^*$) se le denomina **conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)**. Simbólicamente, esto se expresa como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$.
El siguiente diagrama representa a $\mathbb{R}$ incluyendo a los conjuntos numéricos que conoces hasta ahora:

- Números reales
  - Números racionales
    - Enteros
      - Enteros positivos (números naturales)
      - Cero
      - Enteros negativos
    - Fracciones
      - Decimales finitos
      - Decimales infinitos periódicos
  - Números irracionales → Decimales infinitos no periódicos

El símbolo $\cup$ representa la «unión» de conjuntos.

- Utilicen una *applet* de GeoGebra para determinar el valor de $\sqrt{2}$ y busquen un patrón que se repita en sus cifras decimales. ¿Identifican un período? Por lo tanto, ¿qué tipo de número es $\sqrt{2}$, racional o irracional? Compartan y comparen sus respuestas con las de otros grupos.

Applet de GeoGebra
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_9

BDA U1_ACT_3 a 6

Raíces

El 6 de junio de 2023, 6 días antes de su lanzamiento, la Fuerza Aérea de Chile hizo un punto de prensa y mostró una maqueta a tamaño real del satélite FASat-Delta. Como se aprecia en la imagen, tiene forma de paralelepípedo de base cuadrada y sus medidas son las que se muestran en la imagen.

FASat–Delta

Descripción

Satélite de alta resolución, copropiedad de la Fuerza Aérea de Chile (FACH) e ImageSat International (ISI).

La FACH tiene la exclusividad de propiedad de las imágenes en los cielos de Latinoamérica.

Ficha técnica

Medidas: 55 cm × 55 cm × 85 cm

Masa: 100 kg

Altitud de órbita: 550 km

5 Años
Vida útil

50 Megapixeles
Calidad de imagen

72 cm
Alcance lente

Fuente: Fuerza Aérea de Chile. Disponible en *https://www.fach.mil.cl/fasatdelta.html*

- ¿Cuántas caras tiene un paralelepípedo de base cuadrada?, ¿qué formas tienen?
- ¿Qué tipo de número representan las longitudes de los lados de estas caras, racionales o irracionales?
- ¿Qué tipo de número representan las longitudes de las diagonales de estas caras, racionales o irracionales?, ¿cómo lo sabes?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_10* para observar una recreación de la puesta en órbita del satélite chileno.

Aplicaciones y beneficios

Búsqueda y rescate

Estudios de agricultura

Estrategias para el cambio climático

Monitoreo de catástrofes

Observaciones del planeta

Comunicaciones satelitales

- ¿De qué manera piensas que el Sistema Nacional Satelital puede realizar aportes en el ámbito del monitoreo de catástrofes y en el de generar estrategias para el cambio climático? Comenta con tu curso.

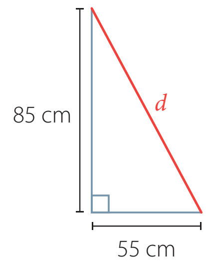
Ya conoces las raíces cuadradas de números naturales, tanto exactas como aproximadas. Ahora se ampliará su definición para calcular raíces de números reales.

EJEMPLO 1

¿Cuál es la medida de la diagonal d de la cara del satélite FASat-Delta que se muestra en la imagen?

1. Identifica una relación geométrica entre la medida d de la diagonal y las de los lados del rectángulo.

   En la imagen se puede reconocer un triángulo rectángulo con las siguientes medidas:

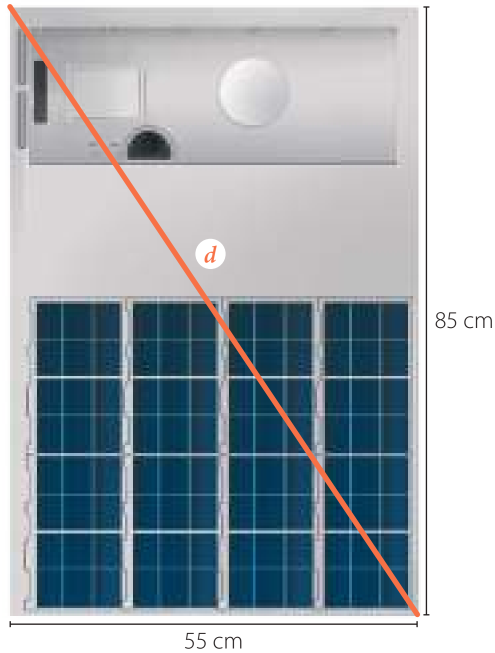


2. Aplica el teorema de Pitágoras.

$$d^2 = (85\text{ cm})^2 + (55\text{ cm})^2$$
$$d^2 = 7\,225\text{ cm}^2 + 3\,025\text{ cm}^2$$
$$d^2 = 10\,250\text{ cm}^2$$
$$d = \sqrt{10\,250}\text{ cm}$$

3. Responde.

   La medida de la diagonal es $d = \sqrt{10\,250}$ cm.



Cara lateral del FASat-Delta.

- ¿Cómo podrías verificar que el valor de la diagonal es $\sqrt{10\,250}$ m en el **EJEMPLO 1**? Explica a tu curso.
- Utiliza una calculadora manual o una *online* y determina el valor de $\sqrt{10\,250}$. ¿Es un número racional o irracional?, ¿cómo lo sabes?

Para calcular una raíz cuadrada con una calculadora científica, debes presionar la tecla que se muestra en la imagen. Luego, escribes la cantidad subradical y pulsas «igual» (=). *

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología del botón que se muestra.

Raíces cuadradas

Si a es un número real positivo o cero, la expresión $\sqrt{a}$, que se lee «**raíz cuadrada de** a», corresponde a un número real x positivo o cero cuyo cuadrado es a.

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$$

Ejemplo: $\sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$

Si a es un número real negativo, el valor de $\sqrt{a}$ no es un número real. Por ejemplo, $\sqrt{-49}$ no es un número real, ya que no existe ningún número que elevado a 2 sea –49.

El símbolo $\Leftrightarrow$ representa una doble implicancia y se lee «si y solo si».

- Consideren los diez primeros números naturales. ¿Para cuáles de ellos su raíz cuadrada es exacta, es decir, corresponde a un número natural? Determínenlo mentalmente o utilicen una calculadora.

BDA U1_ACT_7 U1_VID_2

- ¿En qué unidades se puede expresar un volumen? Nombra dos ejemplos y comenta con el curso.

Ejemplo 2

Supón que se decide construir un satélite con el mismo volumen que el FASat-Delta, pero con forma cúbica. ¿Cuál tendría que ser la medida de su arista?

1. Calcula el volumen V del paralelepípedo.

   El volumen de un paralelepípedo se calcula como el producto de las medidas de su altura, su largo y su ancho.

   $$V = 85 \text{ cm} \cdot 55 \text{ cm} \cdot 55 \text{ cm} = 257\,125 \text{ cm}^3$$

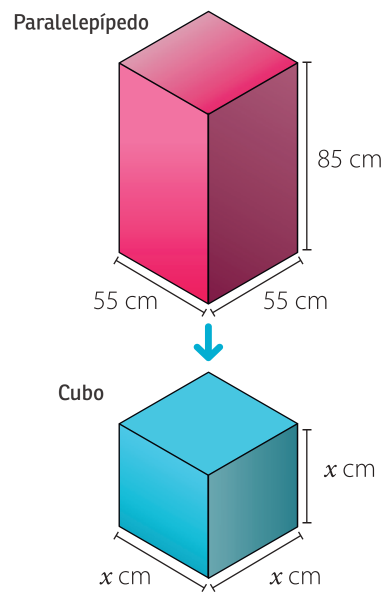
2. Aplica la fórmula del volumen de un cubo y determina la medida x de su arista.

   El volumen de un cubo se calcula como la medida de su arista elevada a 3.

   $$x^3 = V$$
   $$x^3 = 257\,125 \text{ cm}^3$$
   $$x = \sqrt[3]{257\,125} \text{ cm}$$

3. Responde.

   La medida de la arista del cubo es $\sqrt[3]{257\,125}$ cm.



- Utiliza una calculadora manual o una *online* y determina el valor de $\sqrt[3]{257\,125}$. ¿Es un número racional o irracional?, ¿cómo lo sabes?

Para calcular una raíz cúbica con una calculadora científica debes presionar las teclas que se muestran en la imagen. Luego, escribes la cantidad subradical y pulsas «igual» (=). *

* Dependiendo del modelo de calculadora cientifica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

Raíces cúbicas

Si a es un número real, la expresión $\sqrt[3]{a}$, que se lee «**raíz cúbica de a**», corresponde a un número real x cuyo cubo es a. Simbólicamente, esto se expresa de la siguiente manera:

$$x = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow x^3 = a$$

con $x, a \in \mathbb{R}$.

El símbolo $\in$ representa la «pertenencia» de un elemento a un conjunto.

- Considera los diez primeros números naturales. ¿Para cuáles de ellos su raíz cúbica es exacta, es decir, corresponde a un número natural? Determínalo mentalmente o utiliza una calculadora.
- ¿Es siempre real la raíz cúbica de un número real? Discutan al interior del grupo por qué $\sqrt[3]{-8}$ es un número real, pero $\sqrt{-8}$ no. Compartan con el curso sus conclusiones.

Raíces enésimas

Si a es un número real ($a \in \mathbb{R}$) y $n \neq 1$ un número natural ($n \in \mathbb{N}$), la expresión $\sqrt[n]{a}$, que se lee «**raíz enésima de** a», corresponde a un número real x cuya potencia enésima es a. Simbólicamente, esto se expresa de la siguiente manera:

$$x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a$$

en que n es el índice de la raíz y a es la cantidad subradical.

En general, en la expresión anterior se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Si n es un número par, entonces, $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Si n es un número impar, entonces, $a \in \mathbb{R}$.

Para determinar el valor de raíces con distintos índices usando una calculadora científica, existen secuencias que puedes considerar dependiendo del modelo de calculadora que utilices.

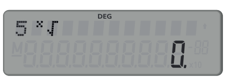
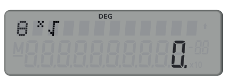
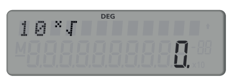
Ejemplo 3

¿Cuáles son los valores de $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[8]{4,5}$ y $\sqrt[10]{-100}$? Utiliza una calculadora.

1. Escribe el índice de la raíz.

$\sqrt[5]{-32}$	$\sqrt[8]{4,5}$	$\sqrt[10]{-100}$
		

2. Presiona los botones SHIFT* y, a continuación, $\sqrt[x]{\ }$*.

$\sqrt[5]{-32}$	$\sqrt[8]{4,5}$	$\sqrt[10]{-100}$
		

3. Escribe la cantidad subradical y presiona el botón =*.

$\sqrt[5]{-32}$	$\sqrt[8]{4,5}$	$\sqrt[10]{-100}$
		

4. Responde.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

$\sqrt[5]{-32} = -2$	$\sqrt[8]{4,5} \approx 1,20684519$	$\sqrt[10]{-100} \notin \mathbb{R}$

Calculadora científica. *

El símbolo $\notin$ representa la «no pertenencia» de un elemento a un conjunto.

- ¿Por qué no es real el valor de $\sqrt[10]{-100}$?, ¿qué cambio harían en la cantidad subradical para que su valor fuera real? Comuniquen sus respuestas y compárenlas con las de otros grupos.

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

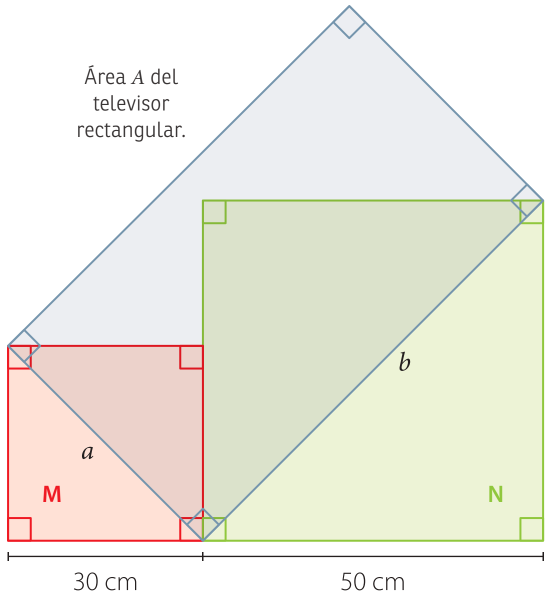
BDA U1_ACT_8 a 11

Las operaciones de raíces tienen una serie de propiedades que se estudiarán a continuación. La primera de ellas surge al desarrollar la raíz enésima de una cantidad subradical que puede expresarse como producto.

Ejemplo 4

Observa el dibujo realizado sobre las diagonales de los cuadrados M y N para dar forma al diseño de un nuevo televisor.

¿Cuál es el área de la superficie de la pantalla proyectada?



1. Determina la medida a del ancho del televisor.

   Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo cuyos catetos son dos lados del cuadrado M y su hipotenusa mide a.

   $a^2 = (30 \text{ cm})^2 + (30 \text{ cm})^2 = 900 \text{ cm}^2 + 900 \text{ cm}^2$

   $a^2 = 1\,800 \text{ cm}^2$

   $a = \sqrt{1\,800} \text{ cm}$

2. Determina la medida b del largo del televisor.

   Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo cuyos catetos son dos lados del cuadrado N y su hipotenusa mide b.

   $b^2 = (50 \text{ cm})^2 + (50 \text{ cm})^2 = 2\,500 \text{ cm}^2 + 2\,500 \text{ cm}^2 = 5\,000 \text{ cm}^2$

   $b = \sqrt{5\,000} \text{ cm}$

3. Calcula el área A de la superficie de la pantalla.

   Se multiplican las medidas a y b.

   $$A = ab = \sqrt{1\,800} \text{ cm} \cdot \sqrt{5\,000} \text{ cm}$$
   $$A = (\sqrt{1\,800} \cdot \sqrt{5\,000}) \text{ cm}^2$$

4. Responde.

   El área de la superficie de la pantalla del televisor queda expresada por $(\sqrt{1\,800} \cdot \sqrt{5\,000}) \text{ cm}^2$.

Raíz enésima de un producto

La **raíz enésima de un producto** es igual al producto de las raíces enésimas de sus factores. Es decir, si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, y $a, b \in \mathbb{R}$ (además, si n es par, entonces, $a, b \geq 0$), se cumple lo siguiente:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

- Observa el siguiente desarrollo: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

  La propiedad anterior corresponde a la multiplicación de raíces enésimas. ¿Qué propiedades de las potencias se utilizaron? Explica.

- Utilicen una calculadora manual o una *online* y determinen los valores de $\sqrt{1\,800}$, $\sqrt{5\,000}$ y $\sqrt{9\,000\,000}$. A partir de sus resultados, analicen la siguiente conjetura: «El producto de dos números irracionales es un número racional». ¿Es siempre verdadera? Comuniquen sus conclusiones al curso.

Una aplicación importante de la propiedad «raíz enésima de un producto» es la descomposición de la cantidad subradical para calcular el valor de una raíz.

Ejemplo 5

¿Cuáles son los valores de las raíces $\sqrt{324}$ y $\sqrt{2\,025}$?

1. Descompón las cantidades subradicales en factores que sean cuadrados perfectos. Los primeros diez números cuadrados perfectos son los siguientes:

$1^2 = 1$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$7^2 = 49$	$9^2 = 81$
$2^2 = 4$	$4^2 = 16$	$6^2 = 36$	$8^2 = 64$	$10^2 = 100$

Un número cuadrado perfecto es aquel cuya raíz cuadrada es un número natural.

Por ensayo y error descomponemos las cantidades subradicales 324 y 2 025.

324

$324 : 4 = 81$

Entonces, $324 = 4 \cdot 81$.

2 025

$2\,025 : 4 = \mathbf{506{,}25}$ ← No es un número cuadrado perfecto.

$2\,025 : 9 = 225$ y $225 : 9 = 25$

Entonces, $2\,025 = 9 \cdot 9 \cdot 25$.

2. Aplica la propiedad denominada «raíz enésima de un producto».

$$\begin{aligned}\sqrt{324} &= \sqrt{4 \cdot 81}\\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{81}\\ &= 2 \cdot 9\\ &= 18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2\,025} &= \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 25}\\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{25}\\ &= 3 \cdot 3 \cdot 5\\ &= 45\end{aligned}$$

3. Responde.
Los valores de las raíces son los siguientes:

$$\sqrt{324} = 18 \qquad \sqrt{2\,025} = 45$$

- ¿Cómo se aplica la propiedad anterior a raíces de otros índices? Por ejemplo, ¿cuál es el valor de $\sqrt[3]{216}$ si la cantidad subradical puede descomponerse como $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$?

Ingreso de un factor como cantidad subradical

Un **factor puede escribirse como cantidad subradical de una raíz** en forma de una potencia en que la base es el factor y el exponente corresponde al índice de la raíz. Es decir, si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, y $a, b \in \mathbb{R}$ (además, si n es par, entonces, $a, b \geq 0$), se cumple lo siguiente:

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a\,b^n}$$

Ejemplo: $3\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{18}$

- Observen las siguientes expresiones:

$$2\sqrt{10} = \sqrt{10 \cdot 2} = \sqrt{20}$$

$$-3\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{4 \cdot (-3)^5} = \sqrt[5]{4 \cdot (-243)} = \sqrt[5]{-972}$$

¿Cómo podrían verificar o negar cada una de ellas aplicando lo aprendido? Reflexionen y comenten con los otros grupos.

BDA U1_ACT_12

Otra propiedad importante de las raíces corresponde a la «raíz elevada a su índice».

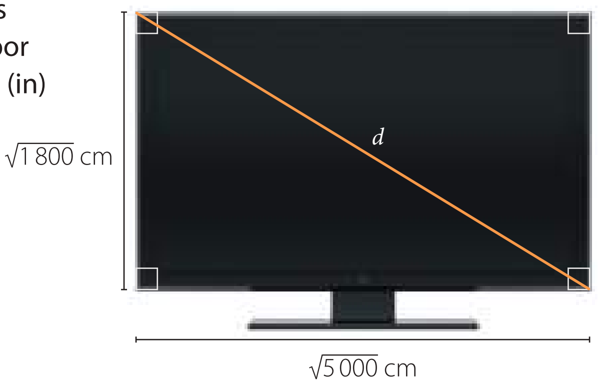
Raíz elevada a su índice

Una **raíz enésima elevada a n** es equivalente a la **raíz de la cantidad subradical elevada a n** y su valor es la **cantidad subradical**. Es decir, si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, y $a \in \mathbb{R}$ (además, si n es par, entonces, $a \geq 0$), se cumple lo siguiente:

$$(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a^n}) = a$$

Ejemplo 6

Una especificación importante al diseñar un televisor es la medida de la diagonal de su pantalla (representada por d en la imagen). Habitualmente se expresa en pulgadas (in) utilizando la equivalencia 1 in = 2,54 cm. ¿Cuál es la medida, en pulgadas, de la diagonal de la pantalla del televisor de la imagen?



1. Expresa la medida d de la diagonal.

   Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de la pantalla y su hipotenusa mide d.

$$d^2 = (\sqrt{1\,800}\text{ cm})^2 + (\sqrt{5\,000}\text{ cm})^2$$

2. Analiza los términos que están a la derecha en la igualdad anterior.

   Se desarrolla aplicando la propiedad denominada «raíz elevada a su índice».

$$(\sqrt{1\,800}\text{ cm})^2 = (\sqrt{1\,800})^2\text{ cm}^2 = \sqrt{1\,800^2}\text{ cm}^2 = 1\,800\text{ cm}^2$$
$$(\sqrt{5\,000}\text{ cm})^2 = (\sqrt{5\,000})^2\text{ cm}^2 = \sqrt{5\,000^2}\text{ cm}^2 = 5\,000\text{ cm}^2$$

3. Calcula la medida d en centímetros.

$$d^2 = 1\,800\text{ cm}^2 + 5\,000\text{ cm}^2$$
$$d^2 = 6\,800\text{ cm}^2$$
$$d = \sqrt{6\,800}\text{ cm}$$

4. Expresa la medida d en pulgadas y calcula su valor utilizando una calculadora.

   Sea x la medida de la diagonal expresada en pulgadas. Entonces, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1\text{ in}}{2{,}54\text{ cm}} = \frac{x}{\sqrt{6\,800}\text{ cm}}$$
$$x = \frac{\sqrt{6\,800}}{2{,}54}\text{ in}$$
$$x \approx 32{,}5\text{ in}$$

5. Responde.

   La medida de la diagonal de la pantalla del televisor es 32,5 in, aproximadamente.

- ¿Cuál fue la secuencia de pasos aplicados para determinar la longitud de la diagonal del televisor en el **Ejemplo 6**? Elaboren un breve informe con una descripción de cada paso y explíquenlos al curso. Si lo estiman pertinente, pueden agregar algún paso intermedio o fusionar dos de los pasos propuestos.

Así como se determinó una expresión para calcular la raíz enésima de un producto, también se puede establecer una fórmula para calcular la raíz enésima de un cociente.

Raíz enésima de un cociente

La **raíz enésima de un cociente** es igual al cociente de las raíces enésimas de sus términos. Es decir, si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ (además, si n es par, entonces, $a \geq 0$ y $b > 0$), se cumple lo siguiente:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo 7

¿Cuál es el valor de $\frac{\sqrt[4]{224}}{\sqrt[4]{14}}$? Responde desarrollando la raíz enésima de un cociente y utilizando potencias.

1. Expresa la división de raíces enésimas como la raíz enésima de un cociente.

$$\frac{\sqrt[4]{224}}{\sqrt[4]{14}} = \sqrt[4]{\frac{224}{14}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

2. Desarrolla la expresión utilizando potencias.

$$\frac{\sqrt[4]{224}}{\sqrt[4]{14}} = \frac{224^{\frac{1}{4}}}{14^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{224}{14}\right)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

3. Responde.

El valor del cociente es 2.

- ¿Cómo calcularías el valor de $0{,}5^3$?, ¿y de $0{,}3^4$? Explica a tu curso.

Raíz de una raíz

La **raíz de una raíz** se puede expresar como una raíz en que la cantidad subradical se conserva y el índice corresponde al producto de los índices de las raíces. Es decir, si $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, $m \neq 1$ y $a \in \mathbb{R}$ (además, si n es par, m es par o ambas son números pares, entonces, $a \geq 0$), se cumple lo siguiente:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

- ¿Cómo calcularías $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$? Considera que $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$. ¿Qué propiedades de las potencias aplicaste? Explica.
- Las raíces $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ y $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$, ¿tienen el mismo valor?, ¿por qué? Confirma tu respuesta utilizando una calculadora.

Los botones que debes presionar para calcular $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ con una calculadora científica son los siguientes: *

- ¿Qué dificultades han tenido para utilizar la calculadora? Entablen una conversación que permita solucionar los problemas o dificultades que expongan los integrantes del grupo.

BDA U1_ACT_13 a 16

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

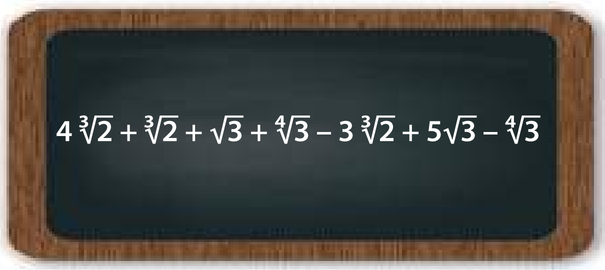
Adición y sustracción de raíces

Para resolver **adiciones** o **sustracciones** con raíces, se puede realizar un procedimiento similar a la operatoria con términos semejantes, es decir, agrupar las raíces con la misma cantidad subradical y el mismo índice y factorizar.
Ejemplo:

$$2\sqrt{5} + \sqrt[3]{7} + 6\sqrt{5} + 8\sqrt[3]{7} = (2 + 6)\sqrt{5} + (1 + 8)\sqrt[3]{7} = 8\sqrt{5} + 9\sqrt[3]{7}$$

Ejemplo 8

¿Cuál es el resultado de la operación que se muestra en la imagen?



1. Identifica y agrupa los términos con raíces de igual índice e igual cantidad subradical.

   Las distintas raíces que se identifican son $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt[4]{3}$. Entonces, se agrupan los términos usando paréntesis.

$$(4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}) + (\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3})$$

2. Suma o resta los factores que multiplican las raíces.

$$(4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}) + (\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3})$$
$$(4 + 1 - 3)\sqrt[3]{2} + (1 + 5)\sqrt{3} + (1 - 1)\sqrt[4]{3}$$
$$2\sqrt[3]{2} + 6\sqrt{3} + 0 \cdot \sqrt[4]{3}$$
$$2\sqrt[3]{2} + 6\sqrt{3}$$

3. Responde.

$$2\sqrt{5} + \sqrt[3]{7} + 6\sqrt{5} + 8\sqrt[3]{7} = (2 + 6)\sqrt{5} + (1 + 8)\sqrt[3]{7} = 8\sqrt{5} + 9\sqrt[3]{7}$$

   El resultado es $2\sqrt[3]{2} + 6\sqrt{3}$.

- ¿Qué relación tiene el concepto de «término semejante» con la agrupación de términos que se realizó? Expresa una analogía que describa esta relación y comenta con tu curso.
- Analicen la siguiente reducción de términos semejantes en una expresión algebraica:

$$4x + x + y + z - 3x + 5y - z$$
$$(4x + x - 3x) + (y + 5y) + (z - z)$$
$$(4 + 1 - 3)x + (1 + 5)y + (1 - 1)z$$
$$2x + 6y + 0 \cdot z$$
$$2x + 6y$$

¿Qué semejanzas ven entre este desarrollo y el realizado en el **Ejemplo 8**? Coméntenlas y reflexionen sobre ellas a partir de la siguiente asignación:

$$x = \sqrt[3]{2} \qquad y = \sqrt{3} \qquad z = \sqrt[4]{3}$$

BDA U1_ACT_17

Racionalizar una expresión fraccionaria significa encontrar otra expresión que sea equivalente a ella, pero que no contenga raíces en el denominador.

Ejemplo 9

¿Cómo se racionaliza la fracción $\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

1. Identifica la raíz cuadrada en el denominador de la fracción.

$$\frac{2}{3\sqrt{5}} \quad \sqrt{5}$$

2. Amplifica la fracción por la raíz cuadrada identificada.

   En este caso, se amplifica por $\sqrt{5}$.

$$\frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

Esto equivale a multiplicar por 1.

3. Aplica propiedades de las raíces para desarrollar el denominador.

$$\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot (\sqrt{5} \cdot \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

4. Responde.

   La racionalización se realiza amplificando por $\sqrt{5}$ y se obtiene la fracción $\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

- ¿Qué propiedades de las raíces se aplicaron en el paso 3 del **Ejemplo 9**? Coméntalas con tu curso.
- ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ y $\frac{2\sqrt{5}}{15}$?, ¿cómo lo sabes?
- Imaginen que tienen que sumar $\frac{2}{5}$ a la fracción del **Ejemplo 9**.

  ¿Cuál de las siguientes adiciones piensan que es más sencillo resolver?

$$\frac{2}{3\sqrt{5}} + \frac{2}{5} \qquad \frac{2\sqrt{5}}{15} + \frac{2}{5}$$

  Comenten su respuesta con otros grupos y reflexionen acerca de la utilidad de la racionalización.

Racionalización en fracciones tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $c > 0$, para **racionalizar el denominador de una fracción de la forma** $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ se amplifica por $\sqrt{c}$ de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

Es posible generalizar la racionalización de fracciones del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$ con una raíz enésima en su denominador en vez de una raíz cuadrada.

Ejemplo 10

¿Cómo se racionaliza la fracción $\dfrac{4}{3\sqrt[5]{7}}$?

1. Identifica los valores de n y m en la raíz del denominador de la fracción.

$$\sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{7^1}$$

2. Calcula el valor de $(n - m)$ y escribe la raíz que amplificará la fracción.

   Como $n - m = 5 - 1 = 4$, la raíz que amplificará la fracción es $\sqrt[n]{c^{n-m}} = \sqrt[5]{7^4}$.

3. Amplifica la fracción por esta raíz.

$$\frac{4}{3\sqrt[5]{7}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7^4}} = \frac{4\sqrt[5]{7^4}}{3\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7^4}}$$

4. Aplica propiedades de las raíces para desarrollar el denominador.

$$\frac{4\sqrt[5]{7^4}}{3\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7^4}} = \frac{4\sqrt[5]{2\,401}}{3 \cdot (\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7^4})} = \frac{4\sqrt[5]{2\,401}}{3 \cdot \sqrt[5]{7 \cdot 7^4}} = \frac{4\sqrt[5]{2\,401}}{3 \cdot \sqrt[5]{7^5}} = \frac{4\sqrt[5]{2\,401}}{3 \cdot 7} = \frac{4\sqrt[5]{2\,401}}{21}$$

5. Responde.

   La racionalización se realiza amplificando por $\sqrt[5]{7^4}$ y se obtiene la fracción $\dfrac{4\sqrt[5]{2\,401}}{21}$.

- ¿Cuál es el valor decimal de $\dfrac{4}{3\sqrt[5]{7}}$?, ¿y de $\dfrac{4\sqrt[5]{2\,401}}{21}$?, ¿son iguales ambos valores? Utiliza una calculadora *online* para responder.

Racionalización en fracciones tipo $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Si $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, $m < n$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$ (además, si n es par, entonces, $c > 0$), para **racionalizar el denominador de una fracción de la forma** $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$ se amplifica por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$ de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{c^{n-m}}}{\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{bc}$$

- Consideren una fracción con denominador de la forma $\sqrt[n]{c^m}$, en que $m > n$. ¿Qué propiedad de las raíces aplicarían para cumplir la condición que indica que el exponente de la cantidad subradical debe ser menor que el índice de la raíz para así poder racionalizarlo (considerando, además, que si n es par, entonces, $c^m > 0$)? Reflexionen a partir de una fracción con denominador $\sqrt[4]{3^7}$ y compartan sus conclusiones con otros grupos.

Racionalización en fracciones con una o dos raíces en el denominador

Cuando hay una o dos raíces cuadradas en el denominador, se puede racionalizar la expresión para obtener un número entero en el denominador. Para esto, se amplifica o multiplica por una fracción, de tal manera que se forme una suma por diferencia en el denominador, eliminando la o las raíces de la expresión original.

- **Caso 1** →

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}} \bullet \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a \bullet (b+\sqrt{c})}{(b-\sqrt{c})\,(b+\sqrt{c})} = \frac{ab+a\sqrt{c}}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{ab+a\sqrt{c}}{b^2-c}$$

con $b, c \geq 0$ y $b^2 \neq c$.

- **Caso 2** →

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \bullet \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a \bullet (\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{b-c}$$

con $b, c \geq 0$ y $b \neq c$.

Ejemplo 11

¿Cómo se racionalizan las fracciones $\frac{3}{5-\sqrt{7}}$ y $\frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$?

1. Amplifica por $(5+\sqrt{7})$ y $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, respectivamente.

$$\frac{3}{5-\sqrt{7}} \bullet \frac{5+\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}} = \frac{3(5+\sqrt{7})}{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})}$$

$$\frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{9(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

2. Desarrolla aplicando el producto notable «suma por su diferencia».

$$\begin{aligned}\frac{3(5+\sqrt{7})}{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})} &= \frac{3(5+\sqrt{7})}{5^2-(\sqrt{7})^2}\\ &= \frac{3(5+\sqrt{7})}{25-7}\\ &= \frac{3(5+\sqrt{7})}{18}\\ &= \frac{5+\sqrt{7}}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{9(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} &= \frac{9(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{9(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}\\ &= \frac{9(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1}\\ &= 9(\sqrt{3}-\sqrt{2})\end{aligned}$$

3. Responde.

La racionalización se realiza amplificando por $(5+\sqrt{7})$ y $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, respectivamente, y se obtienen los números $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ y $9(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

- ¿Cómo podrías comprobar que las fracciones $\frac{3}{5-\sqrt{7}}$ y $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ son equivalentes? Explica a tu curso.
- ¿Cuáles de las estrategias de racionalización conocías? ¿Cómo explicarías la utilidad de racionalizar el denominador de una fracción a alguien que no lo sabe?

BDA U1_ACT_18 a 21

Aproximación y representación de números reales

BDA U1_AUD_1

El matemático George Louis Lecrerc ideó un experimento para calcular un valor aproximado del número π.
El experimento se puede expresar de la siguiente manera:

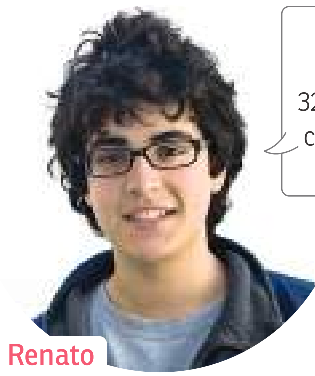
Si se lanza N veces una aguja de longitud l sobre un papel en el que hay trazadas líneas rectas paralelas separadas una de otra por una distancia d, tal que $d = l$, y en n oportunidades la aguja cruza alguna de las líneas, entonces, el cociente $\frac{2N}{n}$ se aproxima al valor de π.

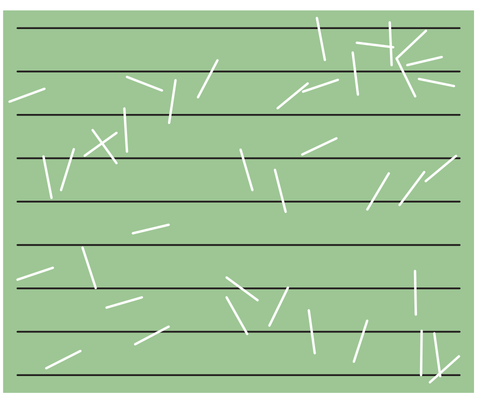
George Louis Lecrerc, conde de Buffon
(1707-1788)
Naturalista, biólogo y matemático francés.
Su principal aporte a la matemática fueron sus trabajos relacionados con las probabilidades.

Dos jóvenes simularon el experimento anterior y obtuvieron los resultados que señalan.

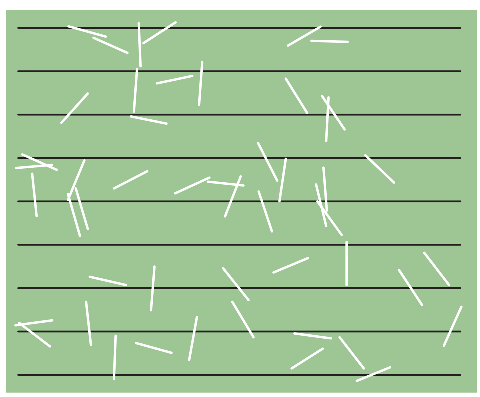
Lancé 40 veces la aguja y en 25 oportunidades cruzó alguna línea del papel.

Y yo la lancé 50 veces y en 32 oportunidades cruzó alguna de las líneas.





Lugares en los que cayó la aguja en los lanzamientos de Camila.



Lugares en los que cayó la aguja en los lanzamientos de Renato.

Realiza 100 lanzamientos en el simulador.

- ¿Cuántas veces la aguja cruzó alguna de las líneas?
- En este caso, ¿cuál es el valor $\frac{2N}{n}$?

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_11* para simular el experimento de la aguja de Buffon.

Comparación de aproximaciones

Si $a, b \in \mathbb{R}$ son aproximaciones de otro número $c \in \mathbb{R}$, se dice que el más cercano a él es una **mejor aproximación**, es decir, se puede afirmar que a es una mejor aproximación de c que b si se cumple que $|c - a| < |c - b|$, en que los símbolos $|x|$ denotan el valor absoluto de x.

Los resultados obtenidos por Camila y Renato pueden compararse para determinar en cuál de los experimentos se obtuvo una mejor aproximación del número irracional π.

Ejemplo 1

Respecto de los experimentos realizados por Camila y Renato, ¿en cuál de ellos se determinó una aproximación más cercana al valor de π?

1. Escribe los resultados que obtuvieron Camila y Renato e identifica los valores de N y n en cada caso.

Camila	Renato
$N_C = 40$ y $n_C = 25$	$N_R = 50$ y $n_R = 32$

2. Calcula el cociente $\dfrac{2N}{n}$ en cada caso.

Camila	Renato
$\dfrac{2N_c}{n_c} = \dfrac{2 \cdot 40}{25} = \dfrac{80}{25} = 3{,}2$	$\dfrac{2N_R}{n_R} = \dfrac{2 \cdot 50}{32} = \dfrac{100}{32} = 3{,}125$

3. Determina con una calculadora el error de la aproximación E como el valor absoluto de la diferencia entre el valor sin aproximar de π y de cada uno de los resultados anteriores.

   Camila → $E_C = |3{,}1415... - 3{,}2| = |-0{,}0584...| = 0{,}0584...$

   Renato → $E_R = |3{,}1415... - 3{,}125| = |0{,}0165...| = 0{,}0165...$

> Para $x \in \mathbb{R}$, la notación $|x|$ representa el «valor absoluto» de x y se define como
>
> $$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0. \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4. Compara las diferencias anteriores.

   Se escriben los números y se observa que la cifra de las centésimas indica que $E_C > E_R$.

   $$0{,}0\boxed{5}84... > 0{,}0\boxed{1}65...$$

5. Responde.

   Como se cumple que $E_C > E_R$, la aproximación de Renato es más cercana al valor de π que la de Camila.

- ¿Por qué piensas que se utilizó el valor absoluto para poder comparar las diferencias de π y los valores obtenidos en los experimentos y no simplemente su diferencia? Explica a tu curso.

Aproximación de un número irracional

Para aproximar un número, se puede realizar un redondeo o un truncamiento a una posición específica de él.

- Si el resultado **es menor** que el número, se dice que se aproximó **por defecto**.
- Si el resultado **es mayor** que el número, se dice que se aproximó **por exceso**.

BDA U1_ACT_22

Al aproximar un número irracional es importante reconocer si se ha hecho por exceso o por defecto.

Ejemplo 2

Si se aproxima el número π por redondeo y por truncamiento a la posición de las diezmilésimas, los valores obtenidos, ¿corresponden a aproximaciones por defecto o por exceso?

1. Realiza el redondeo y el truncamiento del número $\pi = 3{,}14159265\ldots$

Redondeo

3,141 5 9 265...

Posición a la que se aproxima. Cifra mayor que 5.

Por lo tanto, el valor es 3,1416.

Truncamiento

3,141 5 9 265...

Posición a la que se aproxima. Cifras que se eliminan.

Por lo tanto, el valor es 3,1415.

2. Compara los valores obtenidos con el de π.

Redondeo

Se comparan las cifras destacadas.

$3{,}1416 > 3{,}14159265\ldots$

Valor truncado

Se comparan las cifras destacadas.

$3{,}14150 < 3{,}14159265\ldots$

3. Responde.

En este caso, el valor obtenido por redondeo corresponde a una aproximación por exceso y el conseguido por truncamiento a una aproximación por defecto.

Estimación de la raíz cuadrada de un número natural

Para **estimar $\sqrt{c}$ con $c \in \mathbb{N}$**, se pueden elegir dos números $x, y \in \mathbb{N}$ que sean los cuadrados perfectos de dos números naturales consecutivos, es decir, que $\sqrt{x} = a$ y $\sqrt{y} = b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ de manera que a y b sean números consecutivos, y que cumplan la condición $x < c < y$. En resumen, se debe cumplir lo siguiente:

$$x < c < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{c} < \sqrt{y} \iff a < \sqrt{c} < b$$

Ejemplo 3

¿Entre qué números naturales consecutivos se encuentra $\sqrt{50}$?

1. Determina los números x e y según la estrategia propuesta.

Por ensayo y error se encuentran 49 y 64, cuadrados perfectos de 7 y 8 que cumplen $49 < 50 < 64$.

2. Aplica la relación establecida.

$$49 < 50 < 64 \iff \sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{64} \iff 7 < \sqrt{50} < 8$$

3. Responde.

$\sqrt{50}$ se ubica entre los números 7 y 8, más cerca de 7, ya que 50 está más próximo a 49 que a 64.

Ubicación de raíces cuadradas en la recta numérica

Para **ubicar números irracionales en la recta numérica**, se deben aproximar, ya que tienen infinitas cifras decimales. Por ejemplo, para representar el número $e = 2{,}71828182\ldots$, se puede considerar su aproximación 2,72 y representarla con un punto en la recta.

Para situar raíces cuadradas de números naturales, es posible aplicar procedimientos geométricos.

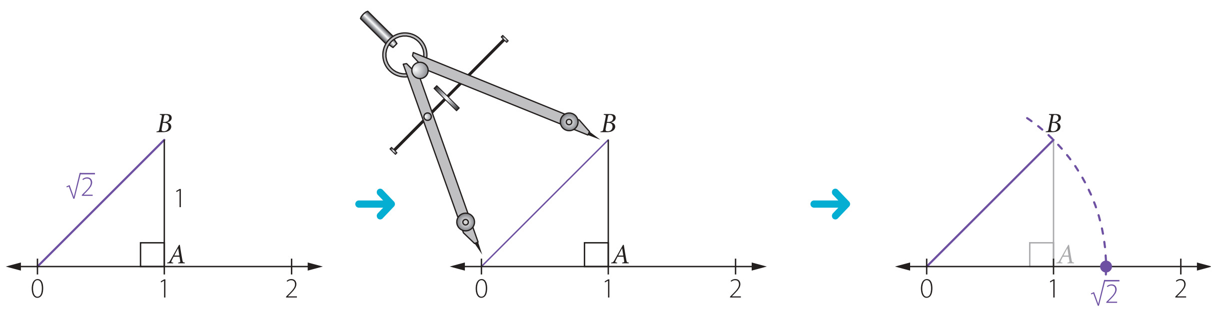
A continuación, se ubicará $\sqrt{2}$ en la recta numérica utilizando un método geométrico con regla y compás y aplicando el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 4

¿Cómo se pueden ubicar y comparar raíces cuadradas en la recta numérica?

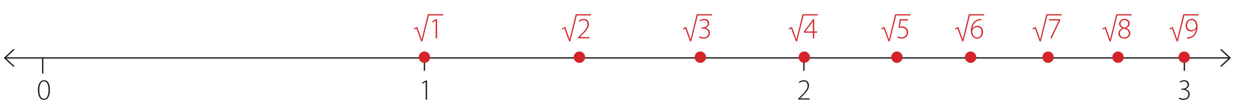
1. Ubica el número $\sqrt{2}$ en la recta numérica usando un compás.

   Se traza sobre el número 1, en forma perpendicular a la recta numérica, un segmento $\overline{AB}$ que mida 1 unidad. A continuación, se forma un triángulo uniendo el punto B con el punto donde se ubica el 0. Al aplicar el teorema de Pitágoras, se tiene que $1^2 + 1^2 = 2$ y, por lo tanto, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ unidades. Finalmente, con centro en 0 y usando como radio la hipotenusa, se traza un arco de circunferencia que corta a la recta numérica en $\sqrt{2}$.



2. Establece un criterio para comparar raíces cuadradas y responde.

   En la recta numérica, si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, entonces, $\sqrt{a}$ se ubica a la izquierda de $\sqrt{b}$. Además, si $a < b$, entonces, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.



   Ejemplo:

   Como se cumple que $2 < 3$, entonces, $\sqrt{2} < \sqrt{3}$. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ se ubica a la izquierda de $\sqrt{3}$ en la recta numérica.

- ¿Qué raíz es mayor, $\sqrt{18}$ o $\sqrt{15}$?, ¿cómo lo sabes? Explica a tu curso.

BDA U1_ACT_23 a 26

Operaciones con números reales

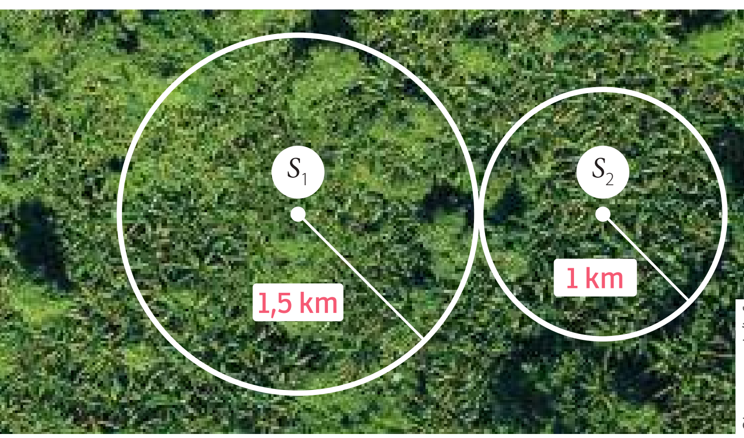
Para frenar la tala ilegal de bosques, la ONG Rainforest Connection utiliza sensores acústicos en los árboles. Estos «escuchan» lo que ocurre en el bosque y lo transmiten en tiempo real a una nube. Así, un sistema de aprendizaje automático reconoce sonidos específicos, como los de una motosierra o un camión, y envía alertas a las autoridades locales. Según se lee en el sitio web de la organización, casi 600 dispositivos «guardianes» han sido ya instalados en 35 países, tales como Brasil, Indonesia, Congo y Filipinas.


Rainforest Connection

Fuente: Muller, N. (19 de abril de 2023) ¿Cómo puede la IA proteger al medioambiente? *Deutsche Welle.* *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_12*

Sensor acústico.

Supón que una institución ambiental ubica dos sensores, S_1 y S_2, en un bosque. El alcance máximo de cada uno es el que se indica en la siguiente imagen:



Shutterstock/Lzf

Vista aérea de un bosque.

- El número de kilómetros cuadrados que puede monitorear el sensor S_1, ¿corresponde a un número racional o irracional?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Cómo calcularías la cantidad de kilómetros cuadrados que pueden vigilar en conjunto ambos sensores?


GettyImages/Michael Hall

Educación ambiental

La instalación de sensores acústicos está en concordancia con el Objetivo de Desarrollo Sostenible **ODS 15** Vida de ecosistemas terrestres.

- ¿Piensas que el uso de inteligencia artificial puede ayudar de manera más efectiva a proteger los bosques de nuestro planeta y aportar a la restauración del medioambiente?, ¿por qué?
- ¿Cómo ayuda la preservación de los bosques al bienestar de todos los seres vivos?
- El 28 de junio de cada año se celebra el Día Mundial del Árbol, mientras que en Chile se conmemora cada 6 de julio.

  Algunos de los múltiples beneficios de los árboles son:
  - dan sombra y generan oxígeno;
  - son el hogar de múltiples especies animales;
  - absorben dióxido de carbono, gas que contribuye al calentamiento global.

Reflexionen con su curso acerca de estos y otros beneficios de los árboles y apliquen su creatividad para aportar al cuidado del medioambiente, por ejemplo, plantando árboles en el colegio o en su entorno.

Ya vimos la adición y la sustracción de raíces. Ahora ejemplificaremos estas operaciones para otros números irracionales.

Adición y sustracción de números irracionales

Para **sumar o restar números irracionales**, se puede aplicar la estrategia que se utilizó para sumar y restar raíces, resolviendo las operaciones como en la adición y sustracción de términos algebraicos semejantes.

Ejemplo 1

Respecto de los sensores acústicos S_1 y S_2, ¿qué área son capaces de monitorear en conjunto?, ¿cuántos kilómetros más puede vigilar el sensor S_1 que el S_2?

1. Expresa el área que es capaz de monitorear cada sensor, A_1 y A_2, respectivamente.

   Los radios de las áreas circulares que pueden vigilar los sensores S_1 y S_2 miden 1,5 km y 1 km, respectivamente. Por lo tanto, las áreas medidas en kilómetros cuadrados (km²) son las siguientes:

   $$S_1 \rightarrow A_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot 1{,}5^2 = 2{,}25\pi \qquad S_2 \rightarrow A_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

2. Expresa la adición y la sustracción de las áreas anteriores.

   Llamando T al área total que pueden monitorear los sensores y D a su diferencia, se puede escribir lo siguiente:

   $$T = A_1 + A_2 = 2{,}25\pi + \pi \qquad D = A_1 - A_2 = 2{,}25\pi - \pi$$

3. Resuelve la adición y la sustracción considerando que π es un número irracional.

   Se suman o restan los coeficientes que acompañan como factores a π.

   $$T = 2{,}25\pi + \pi = (2{,}25 + 1)\pi = 3{,}25\pi$$

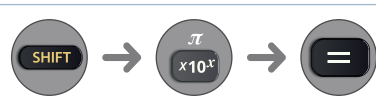
   $$D = 2{,}25\pi - \pi = (2{,}25 - 1)\pi = 1{,}25\pi$$

4. Responde.

   Los sensores en conjunto son capaces de monitorear $3{,}25\pi$ km² de superficie de bosques y el sensor S_1 puede vigilar $1{,}25\pi$ km² de superficie más que el sensor S_2.

- ¿En qué se parecen la estrategia de adición y sustracción aplicada en el **Ejemplo 1** y la desarrollada para sumar y restar raíces? Describe las semejanzas.
- ¿Cuáles son los valores de $3{,}25\pi$ y $1{,}25\pi$? Utiliza una calculadora manual y comparte tu respuesta con el curso.

Los botones que debes utilizar para obtener π con una calculadora científica son los que se muestran en la imagen. *



* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

- Reflexionen y ejemplifiquen para responder las siguientes preguntas:
  - ¿Puede la adición de dos números irracionales dar como resultado un número racional?
  - ¿Puede la adición de dos números racionales dar como resultado un número irracional?

  Compartan sus reflexiones con otros grupos y elaboren en conjunto respuestas comunes.

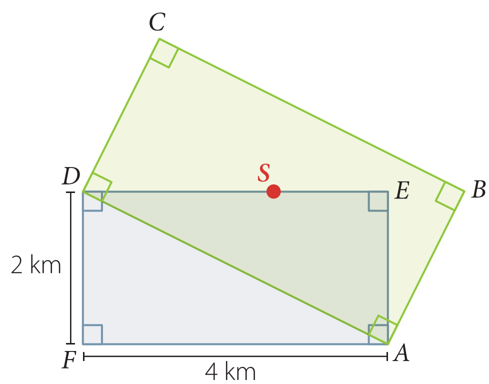
BDA U1_ACT_27

Multiplicación y división de números irracionales

Para **multiplicar o dividir números irracionales**, se puede utilizar una calculadora y luego aproximar los resultados. Si los números que se multiplican o dividen son raíces enésimas, se pueden aplicar las propiedades de raíces estudiadas anteriormente.

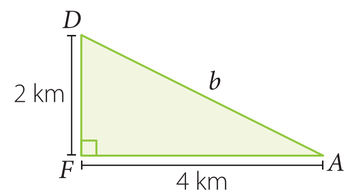
Ejemplo 2

En el centro del parque natural rectangular $ABCD$ que se muestra en la imagen se ubicará un sensor acústico S, cuyo alcance es de 1 km a la redonda. La medida del largo del rectángulo $ABCD$ coincide con la medida de la diagonal del rectángulo $AEDF$ y, además, se cumple que la medida del segmento $\overline{AB}$ equivale a la mitad de la medida del segmento $\overline{AD}$. De acuerdo con esta información, ¿qué porcentaje del parque $ABCD$ podrá monitorear el sensor?



1. Expresa el área A que es capaz de monitorear el sensor S y el área total A_T del rectángulo $ABCD$.

   El área A se conoce del **Ejemplo 1** y es $A = \pi$ km^2.
   El área A_T se puede calcular conociendo las medidas del largo b y el ancho a del rectángulo $ABCD$.



Cálculo de b, largo del rectángulo $ABCD$.

$$b^2 = (4 \text{ km})^2 + (2 \text{ km})^2$$
$$b^2 = 16 \text{ km}^2 + 4 \text{ km}^2$$
$$b^2 = 20 \text{ km}^2$$
$$b = \sqrt{20} \text{ km}$$

Cálculo de a, ancho del rectángulo $ABCD$.

$$2a = b$$
$$2a = \sqrt{20} \text{ km}$$
$$a = \frac{\sqrt{20}}{2} \text{ km}$$

Por lo tanto, el área total A_T es la siguiente:

$$A_T = ab = \frac{\sqrt{20}}{2} \text{ km} \cdot \sqrt{20} \text{ km} = \left(\frac{\sqrt{20}}{2} \cdot \sqrt{20}\right) \text{km}^2$$

2. Aplica propiedades de las raíces para multiplicar los números irracionales.

$$\frac{\sqrt{20}}{2} \text{ km} \cdot \sqrt{20} \text{ km} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}) \text{ km}^2 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{20})^2 \text{ km}^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ km}^2 = \frac{20}{2} = 10 \text{ km}^2$$

3. Expresa el porcentaje solicitado.

$$100 \cdot \frac{A}{A_T} = 100 \cdot \frac{\pi}{10} = 10 \cdot \pi$$

4. Calcula el producto.

   Como hay que multiplicar un número racional por uno irracional, se puede utilizar una calculadora.

$$10\pi = 31{,}4159265\ldots$$

5. Responde.

   El sensor podrá monitorear aproximadamente un 31,4 % del parque.

EJEMPLO 3 » Conecta con **Física**.

Para calcular en forma aproximada el tiempo t (expresado en segundos) que tarda un objeto en caer al suelo si se lo suelta desde una altura h (expresada en metros), puedes utilizar la siguiente fórmula:

$$t = \sqrt{\frac{h}{5}}$$

Los objetos «caen» debido a la fuerza de gravedad de la Tierra.

¿Cuántos segundos demora en caer al suelo un objeto si se lo suelta desde una altura de 100 m?

1. Relaciona los datos de la pregunta con las variables de la fórmula.

   La altura es 100 m, por lo tanto, $h = 100$. Se pide determinar el valor de la variable t.

2. Reemplaza el valor de la altura en la fórmula.

$$t = \sqrt{\frac{h}{5}} = \sqrt{\frac{100}{5}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

3. Racionaliza la fracción obtenida.

$$t = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

4. Utiliza una calculadora *online* para determinar el valor de $2\sqrt{5}$.
   Con la calculadora se obtiene que $2\sqrt{5} \approx 4{,}472135\ldots$

5. Responde.
   El objeto demora 4,5 s en caer al suelo, aproximadamente.

Calculadora científica *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_6

- ¿De qué otra forma desarrollarías $\sqrt{\frac{100}{5}}$?
- ¿Cómo determinarían la altura desde la que se dejó caer una piedra que tardó 3 s en llegar al suelo? Compartan su respuesta con los otros grupos y realicen una explicación paso a paso.

» Para finalizar la **Lección 1**...

- ¿Comprendiste el lenguaje matemático utilizado en la lección?
- ¿Utilizaste lenguaje matemático para responder las preguntas planteadas?, ¿por qué?

- ¿Qué significa ser responsable cuando se trabaja en equipo?
- ¿Fuiste responsable en los trabajos grupales de esta lección?, ¿por qué?

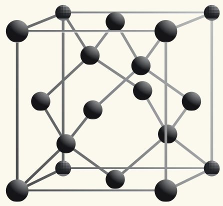
- ¿Fueron interesantes para ti los problemas propuestos en la lección?, ¿demostraste interés?, ¿por qué?
- ¿Cómo han influido en tu vida las nuevas tecnologías, positiva o negativamente?, ¿por qué?

BDA U1_ACT_28 a 31

Lección 2 Potencias, raíces y logaritmos

Potencias y raíces

El diamante es el mineral natural más duro que se conoce y está compuesto por átomos de carbono (C) unidos formando una estructura cristalina cúbica, como se muestra en la imagen.



Estructura cúbica del diamante.

El diamante se forma a partir de minerales que contienen carbono sometidos a altas presiones y altas temperaturas, condiciones que se dan en dos lugares en la Tierra: en el manto de la litósfera bajo las placas continentales (a profundidades de entre 140 km y 190 km) y en el lugar de impacto de meteoritos.

Fuente: Menéndez, J. (s.f.) Asturnatura. *Diamante.* http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_16

GettyImages/Bjoern Wylezich

Diamante natural enclavado en kimberlita.

- Si la arista de los cubos en que se organizan los átomos de carbono en el diamante midiera a, ¿qué expresión algebraica representaría a su volumen?
- Si el volumen de un cubo fuera V, ¿qué expresión representaría a la medida de su arista?
- ¿Por qué piensas que el diamante es un mineral tan apreciado para el oficio de la joyería?

Las potencias y las raíces están estrechamente relacionadas, como verás a continuación.

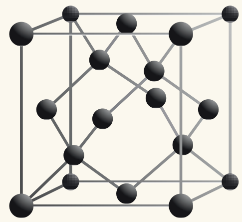
Definición de una potencia de exponente racional como raíz

Una **potencia con exponente racional de la forma** $\frac{p}{q}$, en que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$ y $a \in \mathbb{R}$ (además, si q es par, entonces, $a^p \geq 0$), puede relacionarse con una raíz mediante la siguiente igualdad:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

EJEMPLO 1 Conecta con **Química**.

El volumen de la estructura cúbica del diamante es de 45 Å, en que Å es la unidad de medida de longitud llamada «ángstrom» (1 Å = 10^{-10} m).



¿Cómo puedes expresar en forma de potencia de exponente racional la medida aproximada de la arista de este cubo?

1. Escribe la relación entre el volumen V de un cubo y la medida a de su arista.

$$V = a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{V}$$

2. Expresa la relación anterior mediante la definición de potencia de exponente racional como raíz.

Se identifica el índice de la raíz y el exponente de la cantidad subradical.

$$a = \sqrt[3]{V}$$

$$a = V^{\frac{1}{3}}$$

El índice es 3 y va como denominador de la fracción.

No se explicita el exponente, por lo tanto, es 1 y va como numerador.

3. Responde.

Reemplazando el valor del volumen dado en el enunciado, la medida de la arista puede expresarse como $45^{\frac{1}{3}}$ Å.

- El número $45^{\frac{1}{3}}$, ¿es racional o irracional? Utiliza una calculadora y responde.
- ¿Qué potencia es equivalente a $\sqrt[n]{b}$, con $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$ (además, si n es par, entonces, $b \geq 0$)? Generalicen una expresión y compártanla con el curso.
- ¿Qué potencia obtienen si amplifican el exponente de $45^{\frac{1}{3}}$ por 2?, ¿tiene el mismo valor que la potencia original? Reflexionen colectivamente y generalicen para el caso en que se amplifica el exponente de una potencia de exponente racional por un número entero distinto de 0.

BDA U1_ACT_32

La multiplicación y la división de potencias de exponente racional se desarrollan aplicando las mismas fórmulas utilizadas para estas operaciones con potencias de exponente entero.

Multiplicación de potencias de exponente racional

Para **multiplicar potencias de exponente racional**, se pueden aplicar las siguientes propiedades, considerando $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $s \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$:

	Con igual base	Con igual exponente
Multiplicación de potencias	$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$	$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}$

Ejemplo 2

¿Cuál es el resultado, expresado como raíz, de $8^{-\frac{3}{5}} \cdot 3^{-\frac{3}{5}}$?

1. Aplica la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

$$8^{-\frac{3}{5}} \cdot 3^{-\frac{3}{5}} = (8 \cdot 3)^{-\frac{3}{5}} = 24^{-\frac{3}{5}}$$

2. Expresa la potencia con exponente racional como raíz.

$$24^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{24^{-3}}$$

3. Responde.

   El resultado es $\sqrt[5]{24^{-3}}$, que también se puede escribir como $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{24}\right)^3}$.

División de potencias de exponente racional

Para **dividir potencias de exponente racional**, se pueden aplicar las siguientes propiedades, considerando $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $s \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$:

	Con igual base	Con igual exponente
División de potencias	$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$	$a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}} = (a : b)^{\frac{p}{q}}$

Ejemplo 3

¿Cuál es el resultado, expresado como raíz, de $0{,}5^{\frac{2}{7}} : 0{,}5^{\frac{1}{3}}$?

1. Aplica la propiedad de la división de potencias de igual base.

$$0{,}5^{\frac{2}{7}} : 0{,}5^{\frac{1}{3}} = 0{,}5^{\frac{2}{7}-\frac{1}{3}} = 0{,}5^{\frac{6-7}{21}} = 0{,}5^{-\frac{1}{21}}$$

2. Expresa la potencia con exponente racional como raíz.

$$0{,}5^{-\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{0{,}5^{-1}} = \sqrt[21]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \sqrt[21]{2}$$

3. Responde.

   El resultado es $\sqrt[21]{2}$.

- ¿Qué te resulta más sencillo, multiplicar y dividir potencias de exponente racional o desarrollar estas operaciones con raíces?, ¿por qué?

Aplicando la aproximación de raíces y potencias de exponente racional, es posible ubicarlas en la recta numérica.

EJEMPLO 4

¿Cuál es la ubicación aproximada en la recta numérica de $4^{\frac{1}{3}}$? A partir de lo anterior, ¿cuál es la ubicación de $32^{\frac{1}{3}}$, $500^{\frac{1}{3}}$ y $4\,000^{\frac{1}{3}}$? Redondea a la décima los números decimales.

1. Determina el valor de $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ con una calculadora.

   Se obtiene que $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} = 1{,}58740105\ldots$

2. Redondea el valor anterior a la décima.

   Cifra de las décimas.

   $$\sqrt[3]{4} = 1{,}5\boxed{8}740105\ldots$$

   Esta cifra es mayor que 5.

   Por lo tanto, la aproximación corresponde a $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$.

3. Relaciona $4^{\frac{1}{3}}$ con $32^{\frac{1}{3}}$, $500^{\frac{1}{3}}$ y $4\,000^{\frac{1}{3}}$.

   Expresando todos los números como raíces y aplicando algunas propiedades, se tiene lo siguiente:

   $$32^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$$

   $$500^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5 \cdot \sqrt[3]{4}$$

   $$4\,000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4\,000} = \sqrt[3]{1\,000 \cdot 4} = \sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{4} = 10 \cdot \sqrt[3]{4}$$

4. Reemplaza el valor aproximado de $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$.

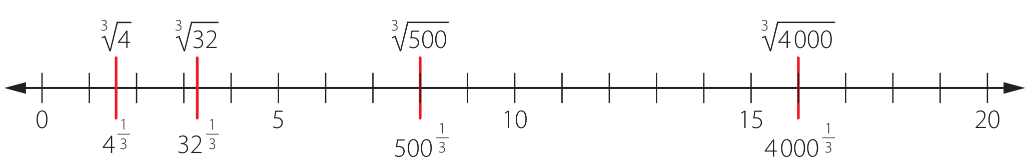
   $$32^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{32} = 2 \cdot \sqrt[3]{4} \approx 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$$

   $$500^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{500} = 5 \cdot \sqrt[3]{4} \approx 5 \cdot 1{,}6 = 8$$

   $$4\,000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4\,000} = 10 \cdot \sqrt[3]{4} \approx 10 \cdot 1{,}6 = 16$$

5. Responde.

   La ubicación aproximada de los números en la recta numérica es la siguiente:



- ¿Cambiaría mucho la ubicación de los números anteriores si se aproximan a la cifra de las centésimas? Reflexiona y comenta con tu curso.

BDA U1_ACT_33 a 36

Logaritmos

En 1923, el inventor español Leonardo Torres Quevedo presentó una máquina que jugaba ajedrez por sí sola muchos años antes de que se hablara de inteligencia artificial. El autómata, llamado Ajedrecista, sentó las bases para los futuros programas computacionales, como Deep Blue, que en 1996 derrotó por primera vez al entonces campeón mundial vigente, el ruso Garry Kasparov.

Fuente: Picón, J. (19 de junio de 2023). El precursor hace 100 años de la inteligencia artificial con la primera máquina de ajedrez. *Agencia EFE.* http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_17

Fuente: Rodríguez, R. (10 de febrero de 2021). El día que un ordenador derrotó a Kasparov: 25 años del milagro de Deep Blue. *El Confidencial.* http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_18


Wikipedia/ MdeVicente

Interior del autómata Ajedrecista.

Shutterstock/StockphotoVideo

Las nuevas generaciones de *bot* (programas informáticos automatizados) resultan casi invencibles para un jugador humano, ya que aprenden por sí mismas utilizando redes neuronales artificiales y microprocesadores ultrarrápidos.

Fuente: BBC News Mundo. (31 de diciembre de 2018). «AlphaZero nos supera de manera profunda»: la computadora que genera su propio conocimiento y juega como un «superhumano». *BBC Mundo.* http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_19

Robot jugando ajedrez con una niña durante el Campeonato Mundial de Ajedrez Rápido y Blitz.

- ¿Qué forma tiene un tablero de ajedrez?, ¿cuántas casillas tiene en total?
- Si pusieras 2 granos de arroz en cada casilla de un tablero, ¿cómo determinarías la cantidad total de granos que habría en él?
- Si pusieras 1 grano de arroz en la primera casilla, 2 en la segunda, 4 en la tercera y así sucesivamente, duplicando cada vez la cantidad de granos de arroz, ¿cómo determinarías la cantidad de granos que habría en la casilla 7? Responde calculando mentalmente.
- ¿Qué problema matemático diferente a los anteriores podrían elaborar utilizando granos de arroz y un tablero de ajedrez? Usen su creatividad y propongan el problema al curso.

El uso de los logaritmos permite trabajar con números grandes en forma simple y rápida, por lo que, antes de la invención de las máquinas electrónicas de cálculo, tuvo una amplia aceptación en diferentes ámbitos del quehacer humano, tales como Ingeniería, Astronomía, Economía, etc.

Definición de logaritmo.

El **logaritmo de a en base b**, que se escribe $\log_b a$, se define como el exponente x de una potencia de base b cuyo valor es a. Para $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $x \in \mathbb{R}$, el logaritmo se define de la siguiente manera:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

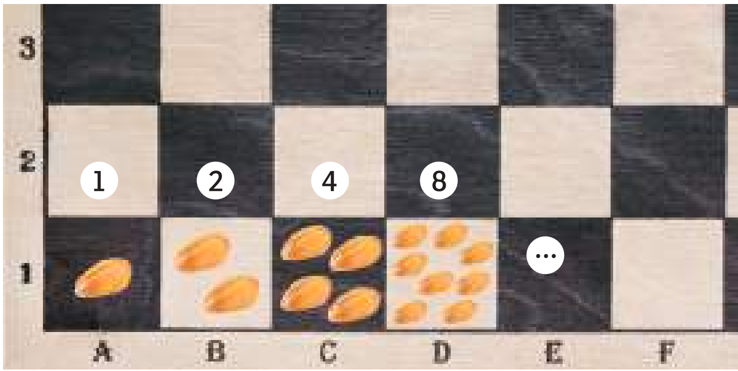
En la expresión $\log_b a$, se tiene que b es la base del logaritmo y a su argumento.

Ejemplo 1

Cuenta una leyenda que en algún lugar de la India un inventor llamado Sissa presentó a su rey Sheram el juego de ajedrez para distraerlo y que este, para recompensarlo, le dijo que le pidiera lo que quisiera. El inventor le señaló lo siguiente:

«Deseo que ponga un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, cuatro en la tercera y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada casilla, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante».

Fuente: Ayala, R. (28 de julio de 2022). Conoce la interesante leyenda del origen del ajedrez. *Muy Interesante.* *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_20*



Vista de una sección de un tablero de ajedrez.

A partir de la relación entre el número de casilla y la cantidad de granos de trigo, ¿en qué casilla habrá 256 granos de trigo?

1. Expresa como potencia la relación entre el número de casilla y la cantidad de granos de trigo que habrá en ella.

N° de casilla	Cantidad de granos	Potencia
1	1	2^0
2	2	2^1
3	4	2^2
n	256	2^{n-1}

2. Expresa como logaritmo la cantidad de granos en las casillas 3 y n.

Casilla 3 ➔ $2^2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 4 = 2$

Casilla n ➔ $2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow \log_2 256 = n - 1$

3. Utiliza una calculadora para calcular $\log_2 256$.

$$\log_2 256 = 8$$

4. Responde.

Como $n - 1 = 8$, entonces, $n = 9$. Por lo tanto, habrá 256 granos de trigo en la casilla 9.

- ¿Cuántos granos de trigo habrá en la casilla 24? Para responder puedes apoyarte con una calculadora de logaritmos *online*.

Calculadora de logaritmos *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_21

BDA U1_ACT_37

- Determinen con una calculadora el valor de log 10 000, log 1 y log 5. ¿En qué caso el logaritmo es 0? ¿Puede la base de un logaritmo ser un número negativo?, ¿por qué? ¿En qué casos un logaritmo tiene valor negativo?

Logaritmo decimal

Se dice que un **logaritmo es decimal cuando su base es 10** y su uso frecuente determinó que en su representación simbólica no se explicite su base. Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}$, el logaritmo decimal se define de la siguiente manera:

$$\log_{10} a = \log a = x \iff 10^x = a$$

- ¿Por qué piensas que el argumento de un logaritmo de base 10 (y de cualquier otra base positiva distinta de 1) debe ser positivo? Intenta encontrar un valor para $x \in \mathbb{R}$, tal que el resultado de 10^x sea un número negativo y comenta tus conclusiones con el curso.

Ejemplo 2

A partir de la definición del logaritmo como potencia, ¿cuál es el valor de log 1 000?

1. Escribe las potencias de 10 para los exponentes 0, 1, 2, 3 y 4.

$$10^0 = 1 \qquad 10^1 = 10 \qquad 10^2 = 100 \qquad 10^3 = 1\,000 \qquad 10^4 = 10\,000$$

2. Expresa como logaritmos decimales las potencias anteriores.

$$\log 1 = 0 \qquad \log 10 = 1 \qquad \log 100 = 2 \qquad \log 1\,000 = 3 \qquad \log 10\,000 = 4$$

3. Responde.

Observando los logaritmos, se concluye que log 1 000 = 3.

- ¿Cómo puedes comprobar el valor anterior? Utiliza una calculadora manual o una *online* y haz la comprobación.

Para calcular un logaritmo decimal con una calculadora científica, debes presionar el botón que se muestra en la imagen. Luego, escribes el argumento y pulsas «igual» (=).*

- Reflexiona sobre la siguiente afirmación:

Como puedes ver a continuación, el valor del logaritmo decimal de un número formado por un 1 seguido de n ceros es n.

$$\log 1\underbrace{0}_{1\text{ cero}} = 1 \qquad \log 1\underbrace{00}_{2\text{ ceros}} = 2 \qquad \log 1\underbrace{000}_{3\text{ ceros}} = 3$$

¿Piensas que es correcto lo que afirma Martina?, ¿por qué? Explica y comenta con tu curso.

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología del botón que se muestra.

EJEMPLO 3

¿Cuáles son los valores de $\log_3 81$, $\log_4 128$ y $\log_{100} 0{,}000001$?

1. Denomina x, y y z a los valores de los logaritmos.

$\log_3 81 = x$	$\log_4 128 = y$	$\log_{100} 0{,}000001 = z$

2. Escribe los logaritmos como potencias.

$3^x = 81$	$4^y = 128$	$100^z = 0{,}000001$

3. Desarrolla aplicando propiedades de las potencias.

$3^x = 3^4$	$(2^2)^y = 2^{2y} = 2^7$	$(10^2)^z = 10^{-6}$

4. Determina el valor de x, y y z teniendo presente que si dos potencias tienen el mismo valor y sus bases son iguales, entonces, sus exponentes son iguales.

$x = 4$	$2y = 7$ $y = \frac{7}{2}$	$2z = -6$ $z = \frac{-6}{2} = -3$

5. Responde.

Los valores de los logaritmos son los siguientes:

$\log_3 81 = 4$	$\log_4 128 = \frac{7}{2}$	$\log_{100} 0{,}000001 = -3$

- ¿Qué relación deben tener la base y el argumento para que el valor de un logaritmo sea un número entero? Analiza los resultados anteriores y responde.

EJEMPLO 4

¿Cuál es el resultado de $\dfrac{\log_3\sqrt{\frac{27}{9}} + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{16}}}{\log 100}$?

1. Desarrolla las raíces cuadradas del numerador.

$$\frac{\log_3\sqrt{\frac{27}{9}} + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{16}}}{\log 100} = \frac{\log_3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}{\log 100} = \frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}{\log 100}$$

2. Calcula los logaritmos y resuelve las operaciones de números racionales.

$$\frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}{\log 100} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

3. Responde.

El resultado es $\frac{5}{4}$.

BDA U1_ACT_38 a 41

Logaritmos de 1, de la base y de una potencia cuya base es igual a la del logaritmo

Para $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$ y $n \in \mathbb{R}$, se cumple lo siguiente:

$$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1 \qquad \log_b b^n = n$$

- ¿Cómo puedes comprobar las igualdades anteriores? Aplica la definición de logaritmo y responde.

Logaritmo de un producto

El **logaritmo del producto de dos números** se puede calcular como la suma de sus logaritmos. Para a, b, $c \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$, esta propiedad se expresa de la siguiente manera:

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

Ejemplo 5

¿Cómo puede demostrarse la propiedad «logaritmo de un producto»?

Para comprobar esta propiedad, se calculará el resultado de $\log_b (a \cdot c)$, considerando los siguientes logaritmos:

$$\log_b a = x \qquad \log_b c = y$$

1. Escribe como potencia cada logaritmo.

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \qquad \log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$$

2. Calcula el producto de las potencias.

$$a \cdot c = b^x \cdot b^y \Leftrightarrow a \cdot c = b^{x+y}$$

3. Expresa el resultado anterior como un logaritmo.

$$a \cdot c = b^{x+y} \Leftrightarrow \log_b (a \cdot c) = x + y$$

4. Responde reemplazando los valores iniciales de x e y en la expresión anterior.

$$\log_b (a \cdot c) = x + y \Leftrightarrow \log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

Ejemplo 6

¿Cuál es el valor de $\log_3 243$?

1. Expresa el argumento del logaritmo como el producto de números múltiplos de 3.

$$\log_3 243 = \log_3 (9 \cdot 9 \cdot 3)$$

2. Aplica la propiedad «logaritmo de un producto» y resuelve.

$$\log_3 (9 \cdot 9 \cdot 3) = \log_3 9 + \log_3 9 + \log_3 3 = 2 + 2 + 1 = 5$$

3. Responde.

El valor es $\log_3 243 = 5$.

- ¿Cómo pueden comprobar que el resultado del **Ejemplo 6** es correcto? Reflexionen en conjunto y generen una instancia para que cada integrante proponga una alternativa diferente de comprobación.

Logaritmo de un cociente

El **logaritmo del cociente de dos números** se puede calcular como la diferencia de sus logaritmos. Para a, b, $c \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$, esta propiedad se expresa de la siguiente manera:

$$\log_b (a : c) = \log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$$

Ejemplo 7

La masa M que queda sin deshacerse de una pastilla efervescente tras un tiempo t de haberla sumergido en agua, se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$M = 0{,}15 \cdot 10^{-0{,}02t}$$

en que M se mide en gramos (g) y t en segundos (s).

Si la masa de la pastilla en un instante dado es 0,05 g, ¿cuántos segundos han transcurrido desde que se la sumergió en agua?

1. Relaciona los datos de la pregunta con las variables de la fórmula.
   La masa que queda sin deshacerse de la pastilla es 0,05 g, por lo tanto, $M = 0{,}05$. Se pide determinar el valor de la variable t.
2. Reemplaza el valor de la variable M en la fórmula y desarrolla.

$$0{,}05 = 0{,}15 \cdot 10^{-0{,}02t} \longleftarrow \text{Divide por 0,15 en ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{0{,}05}{0{,}15} = \frac{0{,}15}{0{,}15} \cdot 10^{-0{,}02t} \longleftarrow \text{Calcula el cociente en el lado derecho de la igualdad.}$$

$$\frac{0{,}05}{0{,}15} = 10^{-0{,}02t} \longleftarrow \text{Calcula el logaritmo en base 10 en ambos lados de la igualdad.}$$

$$\log\left(\frac{0{,}05}{0{,}15}\right) = \log 10^{-0{,}02t}$$

3. Aplica propiedades de los logaritmos.

$$\log 0{,}05 - \log 0{,}15 = -0{,}02t$$

4. Utiliza una calculadora para determinar los valores aproximados de los logaritmos y resuelve.

$$-1{,}301 - (-0{,}824) \approx -0{,}02t$$
$$-0{,}477 \approx -0{,}02t$$
$$\frac{-0{,}477}{-0{,}02} \approx t$$
$$23{,}85 \approx t$$

5. Responde.
   Han transcurrido aproximadamente 24 s desde que la pastilla se sumergió en el agua.

- ¿Qué propiedades de los logaritmos se utilizaron en el paso 3 del **Ejemplo 7**? Comenta con tu curso.

BDA U1_ACT_42

Otras propiedades importantes para facilitar el manejo de logaritmos son las que permiten calcular el logaritmo de una potencia y el de una raíz.

Logaritmos de una potencia y de una raíz

- El **logaritmo de una potencia** es igual al producto del exponente de la potencia por el logaritmo de la base de la potencia. Es decir, si $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, y $n \in \mathbb{R}$, se cumple lo siguiente:

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

- El **logaritmo de una raíz enésima** es igual a la división del logaritmo de la cantidad subradical por el índice de la raíz. Es decir, si $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, se cumple lo siguiente:

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$$

- ¿Cómo podrías obtener la expresión del «logaritmo de una raíz enésima» a partir de la del «logaritmo de una potencia»? Explica a tu curso.

Ejemplo 8

¿Cómo puede demostrarse la propiedad «logaritmo de una potencia»?

Para comprobar esta propiedad se considerarán las siguientes equivalencias:

$$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$$

1. Eleva a n ambos lados de la igualdad del lado derecho de la equivalencia anterior.

$$b^x = a \Leftrightarrow (b^x)^n = a^n \Leftrightarrow b^{xn} = a^n$$

2. Aplica la definición de logaritmo en la tercera igualdad de las equivalencias anteriores.

$$b^{xn} = a^n \Leftrightarrow \log_b a^n = xn$$

3. Responde reemplazando la x por su valor inicial $x = \log_b a$.

$$\log_b a^n = xn \Leftrightarrow \log_b a^n = (\log_b a) \cdot n = n \cdot \log_b a$$

Ejemplo 9

¿Cómo puede demostrarse la propiedad «logaritmo de una raíz enésima»?

Para comprobar esta propiedad se considerarán las siguientes equivalencias:

$$\log_b \sqrt[n]{a} = p \qquad \log_b a = q$$

1. Aplica la definición de logaritmo en ambas igualdades.

$$b^p = a^{\frac{1}{n}} \qquad b^q = a$$

2. Reemplaza la igualdad de la derecha en la de la izquierda.

$$b^p = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b^p = (b^q)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b^p = b^{\frac{q}{n}} \Leftrightarrow p = \frac{q}{n}$$

3. Responde reemplazando sucesivamente p y q en la expresión inicial $\log_b \sqrt[n]{a} = p$.

$$\log_b \sqrt[n]{a} = p \Leftrightarrow \log_b \sqrt[n]{a} = \frac{q}{n} \Leftrightarrow \log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$$

Cambio de base de un logaritmo

Para **cambiar la base de un logaritmo**, se calcula el cociente entre el logaritmo del argumento y el de la base del logaritmo original. Es decir, si a, b, $c \in \mathbb{R}^{+}$, con $b \neq 1$ y $c \neq 1$, se cumple lo siguiente:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Ejemplo 10

¿Cuál es el valor de $\log_4 8$?

1. Aplica la propiedad «cambio de base de un logaritmo».

   Por ejemplo, se puede seleccionar la base 2 para aplicar la propiedad.

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

2. Calcula los logaritmos aplicando su definición.

   Como $2^3 = 8$, entonces, $\log_2 8 = 3$.

   Como $2^2 = 4$, entonces, $\log_2 4 = 2$.

3. Responde reemplazando los valores anteriores.

   El valor es $\log_4 8 = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

- ¿De qué otra forma calcularías $\log_4 8$? Explica a tu curso.

Ejemplo 11

¿Cuál es el valor de $\log_4 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 \sqrt{3}$?

1. Aplica la propiedad «cambio de base de un logaritmo».

   Por ejemplo, los factores se pueden expresar como logaritmos de base 10.

$$\log_4 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 \sqrt{3} = \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log \sqrt{3}}{\log 5}$$

2. Aplica la propiedad «logaritmo de una raíz» y simplifica.

$$\frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log \sqrt{3}}{\log 5} = \frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 4}} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 5}}$$

3. Responde.

   El valor es $\log_4 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

BDA U1_ACT_43

Los logaritmos pueden relacionarse con las potencias y con las raíces si se cumplen las condiciones matemáticas que a continuación se especifican.

Relación entre logaritmos, potencias y raíces

- Para $n \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$, con $b \neq 1$, **los logaritmos y las potencias** pueden relacionarse de la siguiente manera:

$$\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$$

- Para $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, y $a, b \in \mathbb{R}^+$, con $b \neq 1$, **los logaritmos y las raíces** pueden relacionarse de la siguiente manera:

$$\log_b a = n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

- Combinando las relaciones anteriores, teniendo en consideración las condiciones $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, y $a, b \in \mathbb{R}^+$, con $b \neq 1$, es posible establecer la siguiente **relación entre logaritmos, potencias y raíces**:

$$\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

De lo anterior se deduce que para ejemplificar la relación entre logaritmos, potencias y raíces, se debe trabajar con logaritmos cuyo valor sea un número natural diferente de 1.

Ejemplo 12

¿Qué potencia y qué raíz están relacionadas con $\log 1\,000$ y $\log_4 1\,024$?

1. Identifica la base y el argumento de los logaritmos.

El argumento es 1000.

$$\log \overbrace{1000}$$

Como no se explicita, la base es 10.

El argumento es 1024.

$$\log_4 \overbrace{1024}$$

La base es 4.

2. Calcula el valor de los logaritmos.

Como $10^3 = 1\,000$, entonces, se cumple que:

$$\log 1\,000 = 3$$

Como $4^5 = 1\,024$, entonces, se cumple que:

$$\log_4 1\,024 = 5$$

3. Aplica la relación entre logaritmos, potencias y raíces.

$$\log 1\,000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1\,000 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1\,000} = 10$$

$$\log_4 1\,024 = 5 \Leftrightarrow 4^5 = 1\,024 \Leftrightarrow \sqrt[5]{1\,024} = 4$$

4. Responde.
   - $\log 1\,000$ está relacionado con la potencia $10^3 = 1\,000$ y con la raíz $\sqrt[3]{1\,000} = 10$.
   - $\log_4 1\,024$ está relacionado con la potencia $4^5 = 1\,024$ y con la raíz $\sqrt[5]{1\,024} = 4$.

- ¿Cómo puedes comprobar que $\log 1\,000 = 3$ y $\log_4 1\,024 = 5$? Responde utilizando una calculadora de logaritmos *online*.
- ¿Para qué podría servirte la relación entre logaritmos, potencias y raíces? Reflexiona y explica tu respuesta.
- ¿Podrían relacionar $\log_{16} 2$ con una raíz?, ¿por qué? Reflexionen grupalmente y comenten con el curso.

Calculadora de logaritmos *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU1_25

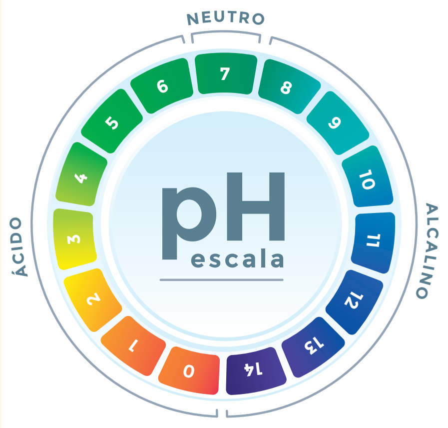
La relación entre logaritmos y potencias permite expresar de diferentes maneras fórmulas en aplicaciones científicas. Un ejemplo corresponde a la medida de acidez o alcalinidad de una sustancia mediante el pH.

Ejemplo 13 » Conecta con **Química**.

El pH es un indicador que permite medir la acidez o alcalinidad de una sustancia. Se calcula mediante la siguiente expresión:

$$pH = -\log [H^+]$$

en que $[H^+]$ representa la concentración de iones de hidrógeno presentes en la sustancia. Esta concentración se mide en moles de H^+ por litro de sustancia (mol/L).



Escala de pH. ➔

Si el pH del vinagre es aproximadamente 3, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno?

1. Reemplaza en la fórmula el valor pH = 3 y multiplica por –1 en ambos lados de la igualdad.

$$3 = -\log [H^+] \Leftrightarrow -3 = \log [H^+]$$

2. Destaca la base 10 del logaritmo y exprésalo como potencia.

$$-3 = \log_{10} [H^+] \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-3}$$

3. Aplica la definición de potencia con exponente negativo.

$$[H^+] = 10^{-3} \Leftrightarrow [H^+] = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

4. Responde.

La concentración de iones hidrógeno en el vinagre es $[H^+] = 0{,}001$ mol/L.

» **Ejemplo 14**

Cuando una ciudad está muy contaminada y precipita, puede producirse el fenómeno llamado «lluvia ácida». Supón que el agua caída en una ciudad presenta una concentración de iones hidrógeno de aproximadamente 0,0000631 mol/L. ¿Cuál es su pH?

1. Reemplaza en la fórmula de pH el valor $[H^+] = 0{,}0000631$ mol/L.

$$pH = -\log (0{,}0000631)$$

2. Utiliza una calculadora para determinar el valor del logaritmo y responde.

Como $-\log (0{,}0000631) \approx 4{,}199970\ldots$, el pH de la lluvia que cayó en la ciudad es, aproximadamente, 4,2.

BDA U1_ACT_44

Ejemplo 15

Alejandro trabaja para una empresa de limpieza y está constantemente expuesto al sonido del motor de una aspiradora. A 1 m de la máquina lo oye con la intensidad que se muestra en la imagen. Si quiere prevenir riesgos para su salud, ¿a qué distancia de la aspiradora debe ubicarse de manera que la intensidad del sonido que percibe sea 6 dB menor?

ShutterStock/Ljupco Smokovski

La intensidad del sonido percibido varía con la distancia a la fuente sonora. Para intensidades β_1 y β_2 (medidas en decibeles) percibidas a las distancias d_1 y d_2 (medidas en metros) de la fuente sonora, respectivamente, puede utilizarse la siguiente expresión:

$$\frac{d_1}{d_2} = 10^{\frac{\beta_2 - \beta_1}{20}}$$

1. Reconoce los datos del enunciado y la incógnita.
   - Directamente se establece que $d_1 = 1$ m y $\beta_1 = 60$ dB.
     Como se quiere que Alejandro perciba un sonido 6 dB menor que β_1, entonces, $\beta_2 = 54$ dB.
   - La incógnita es d_2.
2. Despeja d_2.

$$\frac{d_1}{d_2} = 10^{\frac{\beta_2 - \beta_1}{20}} \rightarrow d_2 = \frac{d_1}{10^{\frac{\beta_2 - \beta_1}{20}}}$$

3. Reemplaza los valores conocidos y resuelve.

$$d_2 = \frac{1}{10^{\frac{54-60}{20}}} = \frac{1}{10^{\frac{-6}{20}}} = \frac{1}{10^{\frac{-3}{10}}}$$

4. Utiliza una calculadora para resolver.
   Como el valor de $10^{\frac{-3}{10}}$ redondeado a la milésima es 0,501, el valor de d_2 es el siguiente:

$$d_2 \approx \frac{1}{0{,}501} \approx 2$$

5. Responde.
   Alejandro tendría que ubicarse aproximadamente a 2 m de distancia de la aspiradora.

- Teniendo en consideración la igualdad $10^{\frac{-3}{10}} = \sqrt[10]{10^{-3}}$, ¿cuál es el valor de esta raíz? Utiliza una calculadora para determinar su valor y así comprobar el resultado obtenido en el **Ejemplo 15**.

Para calcular el valor de $\sqrt[10]{10^{-3}}$ con una calculadora científica, debes presionar los siguientes botones: *

1 → 0 → SHIFT → $\sqrt[x]{}$ ^ → 1 → 0 → $\sqrt[x]{}$ ^ → − → 3 → =

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

Ejemplo 16 Conecta con **Física**.

La energía liberada en un sismo se puede medir utilizando la escala de Richter. A pesar de que para magnitudes iguales o mayores que 7 se utiliza una escala modificada, la Richter permite relacionar en forma aproximada la magnitud de un sismo y la energía liberada en él mediante la siguiente fórmula:

$$\log E = 1{,}5R + 11{,}8$$

en que E es la cantidad de energía liberada medida en ergios (erg) y R es su magnitud en la escala de Richter.

¿Cuál fue la energía que se liberó en el terremoto ocurrido en Valdivia en mayo de 1960 si su magnitud en la escala de Richter fue 9,6?

1. Reemplaza en la fórmula el valor $R = 9{,}6$ y desarrolla la expresión.

$$\log E = 1{,}5R + 11{,}8$$
$$\log E = 1{,}5 \cdot 9{,}6 + 11{,}8$$
$$\log E = 14{,}4 + 11{,}8$$
$$\log E = 26{,}2$$

2. Aplica la definición de logaritmo.

$$\log_{10} E = 26{,}2 \Leftrightarrow E = 10^{26{,}2}$$

3. Utiliza una calculadora para determinar el valor de la potencia.

$$10^{26{,}2} \approx 1{,}584893 \cdot 10^{26}$$

4. Responde.

La energía que se liberó en el terremoto de Valdivia fue, aproximadamente, $1{,}584893 \cdot 10^{26}$ erg.

- ¿A qué raíz enésima equivale la potencia $10^{26{,}2}$?
- El terremoto ocurrido frente a la costa de la actual Región de Ñuble en febrero de 2010 tuvo una magnitud de 8,8 en la escala de Richter. ¿Cómo determinarías cuántas veces menos energía liberó este terremoto si lo comparas con el de Valdivia de 1960? Explica a tu curso.

Para finalizar la **Lección 2**...

- ¿Qué contenido de esta lección te pareció más difícil?, ¿cuál de ellos te gustaría reforzar?
- ¿Qué dificultades tuviste con el uso de herramientas matemáticas, tanto manuales como digitales?
- ¿Piensas que es importante exponer las ideas y opiniones frente a los temas que se presentan durante la clase?, ¿por qué?
- ¿Expusiste algunas de tus ideas y experiencias durante el trabajo de esta lección?, ¿por qué?
- ¿Se escucharon con respeto las opiniones de todos los integrantes durante el trabajo en equipo?, ¿podría mejorarse este aspecto?, ¿cómo?
- ¿Cuál de los temas tecnológicos tratados en la lección despertó tu interés?, ¿por qué?

BDA U1_ACT_45 a 48

Síntesis de Unidad 1 • Números

Lección 1 • Números reales ($\mathbb{R}$)

Aprendiste...

Números reales en el entorno

El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) está compuesto por los números racionales ($\mathbb{Q}$) e irracionales ($\mathbb{Q}^*$).

Raíces

- **Raíces enésimas** (con $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$. Además, si n es par, entonces, $a \geq 0$).

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

- **Propiedades de las raíces** (con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$, $m \neq 1$. Además, si n es par, entonces, $a, b \geq 0$).
  - Raíz enésima de un producto: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
  - Raíz enésima de un cociente: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
  - Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- **Racionalizar** consiste en amplificar una fracción de modo que no queden raíces en su denominador.

Aproximación y representación de números reales

- Para estimar $\sqrt{c}$, se eligen dos números $x, y \in \mathbb{N}$ que cumplan con la condición $x < c < y$, que sean cuadrados perfectos de dos números naturales consecutivos a y b de manera que

$$x < c < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{c} < \sqrt{y} \Leftrightarrow a < \sqrt{c} < b$$

- Para ubicar números irracionales en la recta numérica, se pueden aproximar o, en el caso de las raíces, utilizar procedimientos geométricos.

Operaciones con números reales

Para **operar números irracionales** se aplican las reglas de las operaciones con términos algebraicos semejantes. Se puede utilizar una calculadora para calcular el resultado final y hacer las aproximaciones que sean necesarias.
Cuando hay raíces involucradas en una operación, se pueden aplicar sus propiedades.

Al trabajar en equipo estos contenidos, ¿cómo se organizaron para promover la participación de todos y todas y para respetar y valorizar los aportes individuales?

Lograste...

- Comprender y valorar la perseverancia, la flexibilidad y la originalidad como aspectos del desarrollo exitoso de tareas y trabajos.
- Exponer ideas y experiencias de manera fundamentada.
- Proteger el entorno natural como contexto de desarrollo humano.

¿Cómo equilibras la necesidad de ser flexible y original con la de seguir instrucciones establecidas?

¿Cómo el cuidado del medioambiente puede influir en la calidad de vida de tu comunidad?

Aplicaste...

- La utilización de herramientas manuales y computacionales para resolver problemas.
- El uso de lenguaje matemático para identificar ideas y describir relaciones.
- La construcción de representaciones de acuerdo con las necesidades de la actividad.

Lección 2 • Potencias, raíces y logaritmos

Aprendiste...

Potencias y raíces

- **Relación entre una potencia de exponente racional y una raíz** (con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Además, si q es par, entonces, $a^p \geq 0$).

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

- Con $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq 1$, $n \neq 1$ y $a, b \in \mathbb{R}$ (además, si n es par, entonces, $a, b \geq 0$), las **propiedades de las raíces** pueden escribirse **usando potencias** a partir de la definición de una potencia de exponente racional como raíz.

Logaritmos

- **Definición de logaritmo** (con $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, y $x \in \mathbb{R}$). → $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$
- **Propiedades de los logaritmos.**
  - Considerando $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, con $b \neq 1$ y $n \in \mathbb{R}$.

Logaritmo de un producto	Logaritmo de un cociente	Logaritmo de una potencia
$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$	$\log_b (a : c) = \log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$	$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$

  - Considerando $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$. Logaritmo de una raíz enésima: $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$
  - Considerando $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, con $b \neq 1$ y $c \neq 1$. Cambio de base de un logaritmo: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
- Con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, los **logaritmos, las potencias y las raíces** se relacionan de la siguiente manera:

$$\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

¿Qué fortalezas identificaste en ti relacionadas con el interés y la perseverancia que se requieren para resolver problemas?

Lograste...

- Trabajar en equipo de manera responsable, construyendo relaciones basadas en la confianza mutua.
- Utilizar TIC que resuelvan necesidades en el entorno educativo y social.
- Exponer ideas y experiencias de manera fundamentada.

¿Cómo has utilizado las TIC para mejorar tu proceso de aprendizaje y en qué situaciones te han sido útiles?

¿Cómo puede ayudarte en tus aprendizajes exponer y fundamentar tus ideas e intuiciones?

Aplicaste...

- Definiciones y propiedades para explicar demostraciones matemáticas.
- La comparación de modelos para evaluarlos entre sí.
- La evaluación de procesos para comprobar los resultados de un problema.

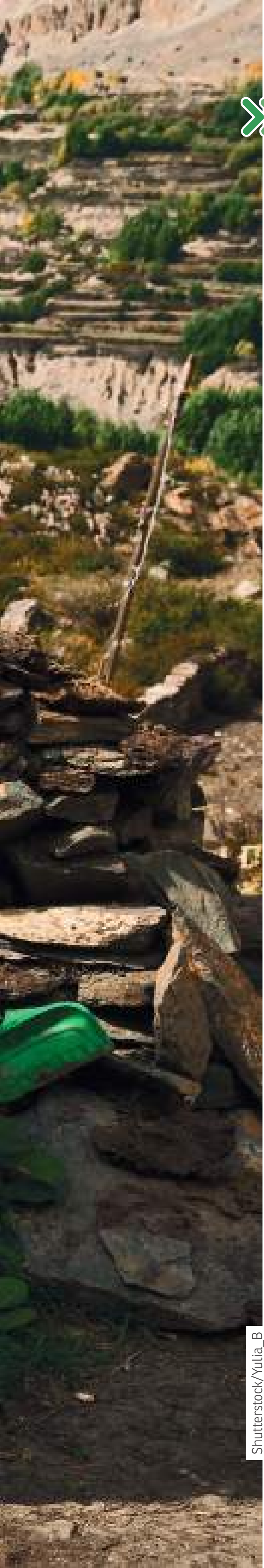
BDA U1_ACT_49 y 50
U1_IMA_2

Unidad 2

Álgebra y funciones

↑ Reflector o espejo parabólico.

En esta unidad profundizarás la noción de función que has adquirido en cursos anteriores, trabajando con la función cuadrática y aplicando el concepto de función inversa para resolver problemas relacionados con temas relevantes de tu entorno.


Shutterstock/Yulia_B

Una cocina solar parabólica es un dispositivo que permite cocinar alimentos usando la radiación solar como fuente de energía. Consta de un reflector o espejo parabólico que concentra la energía solar en un único punto (su foco) que puede alcanzar altas temperaturas, permitiendo así la cocción de los alimentos. Al realizar un corte transversal sobre esta superficie reflectora se obtiene una parábola.

Fuente: Unidad de Ecotecnologías de la UNAM. (s.f.). *Cocinas solares.* Universidad Nacional Autónoma de México. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_63*

1. ¿Qué es una parábola?, ¿podrías dibujar una?, ¿por qué piensas que un reflector parabólico permite aprovechar mejor la energía solar que uno plano?

2. ¿Qué beneficios tiene para el cuidado del medioambiente el uso de cocinas solares?

Habilidades del **siglo XXI**

La colaboración permite resolver problemas a través del trabajo en equipo, fomentando el desarrollo de perspectivas diversas y el intercambio de ideas. Expresar ideas en forma clara y concisa y escuchar en forma activa son elementos esenciales en la colaboración, por lo que comunicación y colaboración son habilidades inseparables.

- Si tuvieras que construir una cocina solar, ¿piensas que sería más efectivo hacerlo en forma individual o en forma grupal?, ¿por qué?
- Imagina que cortas por la mitad la cara frontal del reflector de la imagen, pasando por su centro. ¿Qué características tendría la figura 2D que forma la línea curva de corte? Comunica tu respuesta al curso.

Conocimientos previos

- Recordar estos contenidos facilitará tu trabajo en esta unidad.

Productos notables

- Cuadrado de binomio → $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Suma por su diferencia → $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Producto de binomios con un término común. → $(x+b)(x+c) = x^2 + (b+c)x + bc$

Función

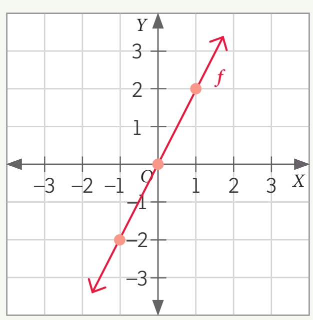
Es una relación entre dos variables, de tal manera que a cada valor de la primera (dominio) le corresponde un único valor de la segunda (recorrido). Generalmente, a los valores del dominio se les representa con la letra x y a los del recorrido, con la letra y.

Representación gráfica de una función

Una función f se puede representar en el plano cartesiano a partir de una tabla de valores.

Para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x$, se muestran una tabla con algunos de sus valores y su gráfica.

x	$y = f(x)$
-1	$2 \cdot (-1) = -2$
0	$2 \cdot 0 = 0$
1	$2 \cdot 1 = 2$



- ¿Cuál de estos contenidos necesitas repasar? Coméntalo con tu curso.

BDA U2_ACT_1 U2_VID_1

Lección 1

Función cuadrática

Ecuación cuadrática

Una célula fotovoltaica permite transformar directamente la energía lumínica del sol en electricidad. Durante la generación de energía no hay emisión de dióxido de carbono, lo que hace que la limpieza sea su característica principal. El dióxido de carbono es una de las principales causas del calentamiento global.

La electricidad así generada puede venderse a las compañías de energía eléctrica y también utilizarse para ahorrar en las cuentas de luz de los hogares.

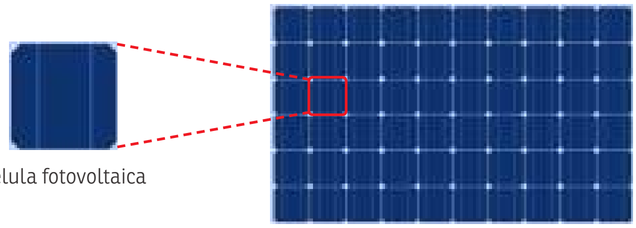
Gettyimages/schmidt-z

Este tipo de medidas y otras similares, orientadas a desarrollar la transición energética renovable, promueven el Objetivo de Desarrollo Sustentable **ODS 7** **Energía asequible y no contaminante** para garantizar el acceso a una energía asequible, segura, sostenible y moderna para todos.

Educación ambiental

- ¿Qué tipos de energía conoces? Comenta con tu curso.
- ¿Has visto en tu entorno casas con paneles solares como los que se muestran en la imagen?, ¿qué opinas del uso de esta fuente de energía?
- Diariamente, ¿en qué utilizan energía? Discutan grupalmente y generen las condiciones para escuchar la respuesta de cada integrante.
- ¿Creen que se malgasta energía en el colegio?, ¿cómo podrían realizar una campaña de ahorro de energía? Organícense para identificar consumos energéticos innecesarios y buscar entre todos estrategias que permitan minimizarlos.

Una célula fotovoltaica es la unidad más pequeña que compone un sistema de generación de energía solar. Un módulo fotovoltaico está compuesto por varias células ordenadas en un arreglo rectangular.



Célula fotovoltaica

Módulo fotovoltaico

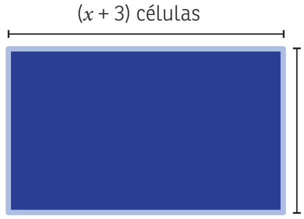
Ejemplo 1

En el techo de una casa se instaló una matriz solar formada por varios módulos fotovoltaicos. Si uno de los módulos está formado por 28 células y está diseñado de manera que tiene 3 células más de largo que de ancho, ¿qué expresión permite calcular cuántas células se distribuyen a lo ancho de él?

1. Dibuja una representación de la situación.

   El módulo se puede representar como un rectángulo, en el que usamos la letra x para señalar la cantidad de células que se distribuyen en su ancho.

$(x + 3)$ células



x células

2. Plantea una ecuación para determinar la cantidad de células que forman cada lado del módulo.

   Como en total hay 28 células, la ecuación es la siguiente:

$$x\,(x + 3) = 28$$

3. Desarrolla algebraicamente la ecuación.

$x\,(x + 3) = 28$	⟵ Resuelve la parte izquierda de la ecuación.
$x^2 + 3x = 28$	⟵ Resta 28 en ambos lados de la ecuación.
$x^2 + 3x - 28 = 28 - 28$	⟵ Resuelve la parte derecha de la ecuación.
$x^2 + 3x - 28 = 0$	

4. Responde.

   La ecuación $x^2 + 3x - 28 = 0$ permite saber cuántas células hay a lo ancho del módulo.

Ecuación cuadrática

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita** o **ecuación cuadrática** es una ecuación en la que el mayor exponente de la incógnita es 2. Su forma general es la siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

- Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación cuadrática es **completa**.
- Si $b = 0$ o $c = 0$ o ambas son iguales a 0, se dice que la ecuación cuadrática es **incompleta**.

BDA U2_ACT_2 y 3

Resolver una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) consiste en encontrar sus soluciones o «raíces», es decir, los valores de la incógnita x que hacen verdadera la igualdad. A continuación, describiremos cuatro formas de resolver ecuaciones cuadráticas.

Resolución de ecuaciones cuadráticas usando la raíz cuadrada

Este método se puede aplicar para resolver **ecuaciones incompletas con $b = 0$**, es decir, **del tipo $ax^2 + c = 0$** (en que $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $-\frac{c}{a} \geq 0$). Los pasos que puedes seguir son los siguientes:

1° Escribe un término en cada lado de la igualdad.

$$ax^2 = -c$$

2° Divide por el coeficiente que acompaña a x^2.

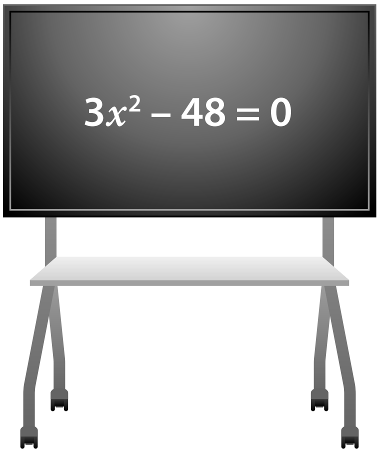
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

3° Calcula la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad para obtener las soluciones x_1 y x_2:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo 2

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación que se muestra en la imagen? Aplica una raíz cuadrada para resolver.



1. Suma 48 en ambos lados de la igualdad.

$$3x^2 - 48 = 0$$
$$3x^2 - 48 + 48 = 0 + 48$$
$$3x^2 = 48$$

2. Divide por 3.

$$3x^2 = 48$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{48}{3}$$
$$x^2 = 16$$

3. Calcula la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

$$x^2 = 16 \rightarrow x_1 = \sqrt{16} = 4 \text{ y } x_2 = -\sqrt{16} = -4$$

4. Responde.

Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 48 = 0$ son -4 y 4.

- ¿Cómo podrías comprobar que -4 y 4 son las soluciones o «raíces» de la ecuación $3x^2 - 48 = 0$? Reflexiona y comunica tu respuesta al curso.
- Sabiendo que en la ecuación anterior se cumple que: $a = 3$, $b = 0$ y $c = -48$, resuélvanla siguiendo los pasos del recuadro anaranjado, ¿obtienes las mismas soluciones que en el Ejemplo 2?

Ejemplo 3

¿Cómo podrías resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 28 = 0$?, ¿cuáles son sus soluciones?

1. Factoriza el lado izquierdo de la ecuación.

   Dos números cuya suma es 3 y su producto es −28 son 7 y −4. Entonces, se cumple que $x^2 + 3x - 28 = (x + 7)(x - 4)$ y la ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

   $$(x + 7)(x - 4) = 0$$

2. Analiza las posibles soluciones de la ecuación factorizada anterior.
   - Si en el lado izquierdo de la ecuación se reemplaza $x = 4$, se obtiene lo siguiente:
     $$(4 + 7)(4 - 4) = 11 \cdot 0 = 0$$
   - Si en el lado izquierdo de la ecuación se reemplaza $x = -7$, se obtiene lo siguiente:
     $$(-7 + 7)(-7 - 4) = 0 \cdot (-11) = 0$$
   - Si $x \neq 4$ y $x \neq -7$, entonces, $(x + 7)(x - 4) \neq 0$.

3. Responde.

   Como conclusión, se puede afirmar que los valores $x = 4$ y $x = -7$ hacen que la igualdad $(x + 7)(x - 4) = 0$ sea verdadera. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 28 = 0$ son 4 y −7.

- ¿Cuáles son las soluciones de las ecuaciones factorizadas $(x + 2)(x - 9) = 0$ y $(x - 4)(x - 6) = 0$? Aplica la estrategia del Ejemplo 3 y comparte tus respuestas con tu curso.

Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Para **resolver** una **ecuación cuadrática** por **factorización**, se deben seguir los siguientes pasos:

1° Desarrolla la ecuación para escribirla como una expresión algebraica en un lado y un 0 en el otro.

2° Factoriza la expresión algebraica.

3° Iguala a 0 cada factor y determina los valores de x que hacen verdaderas las igualdades anteriores. Estos valores corresponden a las soluciones de la ecuación.

- Para **ecuaciones incompletas con $c = 0$**, es decir, **del tipo $ax^2 + bx = 0$** (en que $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$), en el paso 2°, la ecuación queda como $x(ax + b) = 0$ y, por lo tanto, las soluciones son las siguientes:

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Para factorizar **ecuaciones completas del tipo $x^2 + bx + c = 0$** (con $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$), se buscan dos números p y q, tales que su suma sea igual a b y su producto sea igual c, es decir, $p + q = b$ y $pq = c$. Entonces, las soluciones de la ecuación son los opuestos aditivos de p y q.

$$x^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + (p + q)x + pq = 0$$
$$(x + p)(x + q) = 0$$

Es decir, $(x + p) = 0$ o $(x + q) = 0$. Por lo tanto, las soluciones son las siguientes:

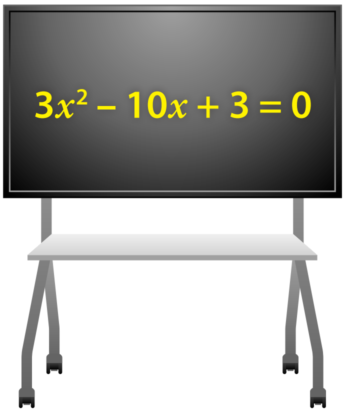
$$x_1 = -p \qquad\qquad x_2 = -q$$

BDA U2_ACT_6

Otro método para resolver una ecuación cuadrática consiste en completar cuadrados de binomio.

EJEMPLO 4

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación que se muestra en la imagen?



1. Despeja en la ecuación el término que no presenta la incógnita.

El término que no presenta la incógnita (término libre) es 3.
Al despejarlo, la ecuación queda así:

$$3x^2 - 10x = -3$$

2. Completa el cuadrado de binomio en el lado izquierdo de la ecuación.

- Divide la ecuación por 3.

$$x^2 - \frac{10}{3}x = -1$$

- Suma en ambos lados el cuadrado de la mitad de $\frac{10}{3}$, es decir, $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$.

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = -1 + \frac{25}{9}$$

- Factoriza el lado izquierdo y resuelve la adición del lado derecho.

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

3. Determina las soluciones calculando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{\left(x - \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}}$$

Entonces, las soluciones son las siguientes:

$$x_1 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow x_1 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3 \qquad \Big| \qquad x_2 - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

4. Responde.

Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 10x + 3 = 0$ son $\frac{1}{3}$ y 3.

- ¿Cómo podrías comprobar que las soluciones del **EJEMPLO 4** son $\frac{1}{3}$ y 3? Utiliza una calculadora de ecuaciones cuadráticas *online* y responde.

Calculadora de ecuaciones cuadráticas *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_64

Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Un método para resolver ecuaciones cuadráticas consiste en utilizar la **completación de cuadrados**. Para aplicarlo, puedes realizar los siguientes pasos:

1° Despejar el término libre de la ecuación.

2° Completar el cuadrado de binomio en el lado de la igualdad que contiene la incógnita.

3° Encontrar las soluciones de la ecuación, considerando la raíz cuadrada del término libre.

Ejemplo 5

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 10x + 21 = 0$? Completa el cuadrado para resolver.

1. Despeja en la ecuación el término libre.

$$x^2 - 10x = -21$$

2. Completa el cuadrado de binomio en el lado izquierdo de la ecuación.
   - Suma en ambos lados el cuadrado de la mitad de 10, es decir, $5^2 = 25$. → $x^2 - 10x + 25 = -21 + 25$
   - Factoriza el lado izquierdo y resuelve la adición del lado derecho. → $(x - 5)^2 = 4$
3. Determina las soluciones calculando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{(x-5)^2} = \sqrt{4}$$

Entonces, las soluciones son las siguientes:

$$x_1 - 5 = 2 \qquad x_2 - 5 = -2$$

$$x_1 = 7 \qquad x_2 = -2 + 5 = 3$$

4. Responde.

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 10x + 21 = 0$ son 3 y 7.

Ejemplo 6

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $8x^2 - 2x - 1 = 0$? Completa el cuadrado para resolver.

1. Despeja en la ecuación el término libre.

$$8x^2 - 2x = 1$$

2. Completa el cuadrado de binomio en el lado izquierdo de la ecuación.
   - Divide la ecuación por 8. → $x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}$
   - Suma en ambos lados el cuadrado de la mitad de $\frac{1}{4}$, es decir, $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$. → $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64}$
   - Factoriza el lado izquierdo y resuelve la adición del lado derecho. → $\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$
3. Determina las soluciones calculando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{64}}$$

Entonces, las soluciones son las siguientes:

$$x_1 - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \qquad x_2 - \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

4. Responde.

Las soluciones de la ecuación $8x^2 - 2x - 1 = 0$ son $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{4}$.

BDA U2_ACT_7

Bhaskara II (1114-1185)

Fue un matemático y astrónomo indio. Su labor representa la cima del conocimiento matemático del siglo XII. Sus aportes incluyen célebres trabajos con ecuaciones algebraicas, siendo el más famoso la deducción de una fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Fuente: Aznar, E. (s.f.). *Bhaskara, matemático y astrónomo.* Universidad de Granada. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_65*

Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

La **fórmula general** para **resolver** una **ecuación cuadrática del tipo $ax^2 + bx + c = 0$** (con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, llamando x_1 y x_2 a las soluciones, se tiene que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se define el **discriminante (Δ)** de una ecuación cuadrática a la siguiente expresión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Usando esta definición, las soluciones de la ecuación son las siguientes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Las **soluciones o raíces de una ecuación cuadrática son reales** si se cumple que $\Delta \geq 0$, es decir, si $b^2 \geq 4ac$.

Ejemplo 7

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $2x^2 + 7x - 15 = 0$? Utiliza la fórmula general para resolver.

1. Identifica los coeficientes de la ecuación.

$$a = 2 \qquad b = 7 \qquad c = -15$$

2. Reemplaza los valores en la fórmula general y desarrolla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

3. Separa las soluciones.

$$x_1 = \frac{-7 + 13}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-7 - 13}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

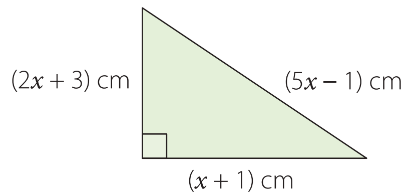
4. Responde.

Las soluciones de la ecuación $2x^2 + 7x - 15 = 0$ son $\frac{3}{2}$ y -5.

- Dado que las soluciones de la ecuación $2x^2 + 7x - 15 = 0$ son reales, ¿se cumple que $\Delta \geq 0$ o $\Delta < 0$?, ¿cómo lo sabes? Comenten su respuesta con los otros grupos.

≫ Ejemplo 8

¿Cuál es el área del triángulo rectángulo de la imagen? Aplica el teorema de Pitágoras y resuelve la ecuación cuadrática asociada utilizando la fórmula general.



1. Aplica el teorema de Pitágoras utilizando las medidas de los lados del triángulo rectángulo.

   El teorema de Pitágoras establece que el cuadrado de la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de sus catetos.

$$(2x+3)^2 + (x+1)^2 = (5x-1)^2$$

2. Resuelve los cuadrados de binomio en la ecuación anterior.

$$(4x^2 + 12x + 9) + (x^2 + 2x + 1) = (25x^2 - 10x + 1)$$

3. Agrupa los términos semejantes, redúcelos y escribe la ecuación cuadrática en su forma general.

$$(4x^2 + x^2 - 25x^2) + (12x + 2x + 10x) + (9 + 1 - 1) = 0$$
$$-20x^2 + 24x + 9 = 0$$

4. Identifica los coeficientes de la ecuación.

$$a = -20 \quad \Big| \quad b = 24 \quad \Big| \quad c = 9$$

5. Reemplaza los valores en la fórmula general y desarrolla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot (-20) \cdot 9}}{2 \cdot (-20)} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 720}}{-40} = \frac{-24 \pm \sqrt{1\,296}}{-40} = \frac{-24 \pm 36}{-40}$$

6. Separa las soluciones.

$$x_1 = \frac{-24 + 36}{-40} = \frac{12}{-40} = -\frac{3}{10} = -0{,}3 \qquad \Big| \qquad x_2 = \frac{-24 - 36}{-40} = \frac{-60}{-40} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

7. Decide cuál de las soluciones se utilizará para determinar las medidas de los lados del triángulo.

$x_1 = -0{,}3$

- $2x_1 + 3 = 2 \cdot (-0{,}3) + 3 = 2{,}4$
- $x_1 + 1 = -0{,}3 + 1 = 0{,}7$
- $5x_1 - 1 = 5 \cdot (-0{,}3) - 1 = -2{,}5$

Como una de las medidas que se obtiene es negativa, esta solución no será considerada.

$x_2 = 1{,}5$

- $2x_2 + 3 = 2 \cdot 1{,}5 + 3 = 6$
- $x_2 + 1 = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$
- $5x_2 - 1 = 5 \cdot 1{,}5 - 1 = 6{,}5$

Como las tres medidas son positivas, se utilizará esta solución para calcular el área del triángulo.

8. Calcula el área A del triángulo con las medidas anteriores.

   El área de un triángulo rectángulo se puede calcular como la mitad del producto de la medida de sus catetos. En este caso, las medidas de los catetos son 6 cm y 2,5 cm.

$$A = \frac{6 \text{ cm} \cdot 2{,}5 \text{ cm}}{2} = \frac{15}{2} \text{ cm}^2 = 7{,}5 \text{ cm}^2$$

9. Responde.

   El área del triángulo es 7,5 cm^2.

BDA U2_ACT_8 a 11
U2_IMA_1

Función cuadrática y su gráfica

Tradiciones ancestrales **Rapa Nui**

En febrero de cada año los habitantes de Rapa Nui organizan una celebración cultural y deportiva llamada *Tapati* que permite mantener vivas sus prácticas ancestrales relacionadas con la pesca, la elaboración de artesanía y el cultivo de la tierra, entre otras.

Algunas de las principales competencias que se llevan a cabo son las siguientes:

- *Takona:* involucra pintura corporal para mostrar el estatus dentro de la sociedad.
- *Pora*: competencia de nado sobre flotador de totora.
- *Vaka Ama*: competencia de canotaje en embarcación de totora.
- *Vaka Tuai*: competencia en que, reunidos en grupos, los participantes deben recrear una embarcación tradicional y navegar en ella.
- *Haka Pei*: competencia en que los participantes se deslizan por la ladera de un volcán acostados sobre un trineo hecho de troncos de plátanos.

Fuente: Memoria Chilena, Biblioteca Nacional de Chile. (s.f.). *Rapa Nui*. Ministerio de las Culturas, las Artes y el Patrimonio. http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_66

Competencia *Vaka Ama* practicada en Rapa Nui.

El *Tau Ki Te Huri* es una práctica ancestral de Rapa Nui que consiste en arrojar una lanza de madera con punta de obsidiana, construida por los propios competidores, para intentar acertar a un tronco de plátanos. Originalmente era realizado como parte del entrenamiento para la pesca.

Fuente: Rosales, T. (27 de marzo de 2020). *Isla Tradiciones; Tau Ki Te Huri: un deporte ancestral de Rapa Nui*. Canal 13. http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_67

- ¿Qué figura crees que podría trazar en el aire una lanza al ser arrojada por un participante del *Tau Ki Te Huri*? Comenta con tu curso.
- ¿Cuáles de las prácticas culturales descritas de los rapa nui te gustaría realizar si tuvieras la oportunidad?, ¿por qué?
- ¿Piensan que para incorporar la visión y las tradiciones de los Pueblos Originarios se podría implementar la práctica de deportes como el *Palín* mapuche y el *Vaka Tuai*, el *Haka Pei* y el *Pora* rapa nui en los colegios? Comuniquen su respuesta al curso e intercambien argumentos para justificarla.

Función cuadrática

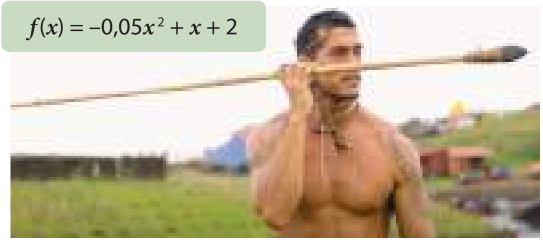
En forma general, una **función cuadrática** puede definirse por $f: \mathbb{R} \rightarrow R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

- El símbolo $\subset$ se lee «subconjunto» y señala que un conjunto está incluido en otro.
- El símbolo $\in$ representa la «pertenencia» de un elemento a un conjunto.

Ejemplo 1

En uno de sus entrenamientos, un competidor de *Tau Ki Te Huri* realizó un lanzamiento cuya trayectoria puede describirse en forma aproximada por la expresión que se muestra en la imagen, en que x representa la posición horizontal de la lanza e $y = f(x)$, la vertical.

¿Cuál es la gráfica que representa la trayectoria de su lanza?

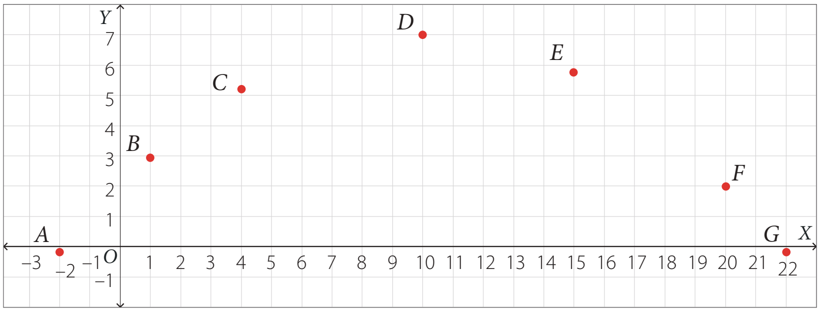


Captura de pantalla de http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_68.

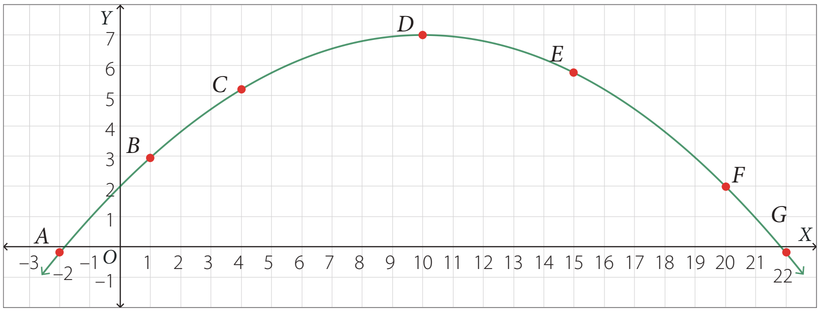
1. Construye una tabla para algunos valores de x y $f(x)$.

x	$y = f(x)$	(x, y)
–2	$f(-2) = -0{,}05 \cdot (-2)^2 + (-2) + 2 = -0{,}2$	$A(-2; -0{,}2)$
1	$f(1) = -0{,}05 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 2{,}95$	$B(1; 2{,}95)$
4	$f(4) = -0{,}05 \cdot 4^2 + 4 + 2 = 5{,}2$	$C(4; 5{,}2)$
10	$f(10) = -0{,}05 \cdot 10^2 + 10 + 2 = 7$	$D(10, 7)$
15	$f(15) = -0{,}05 \cdot 15^2 + 15 + 2 = 5{,}75$	$E(15; 5{,}75)$
20	$f(20) = -0{,}05 \cdot 20^2 + 20 + 2 = 2$	$F(20, 2)$
22	$f(22) = -0{,}05 \cdot 22^2 + 22 + 2 = -0{,}2$	$G(22; -0{,}2)$

2. Dibuja los puntos en el plano cartesiano.



3. Une los puntos para responder.



- En la gráfica anterior, ¿qué tramo de la curva representa el lanzamiento real de la lanza? Reflexiona considerando que las variables x e y deben ser mayores que 0.

BDA U2_ACT_12

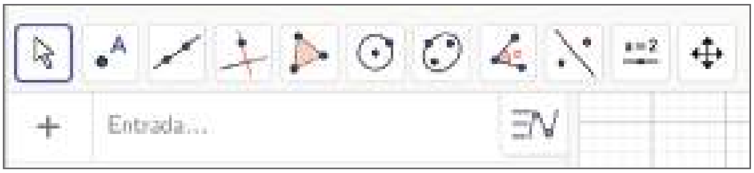
Existen diversos *software* en internet que te permiten graficar funciones en forma rápida y sencilla. Veremos un ejemplo a continuación.

Software matemático *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_69

Ejemplo 2

¿Cuál es la gráfica de la función real $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$? Utiliza el *software* matemático sugerido.

1. Abre el programa y observa el extremo superior izquierdo.

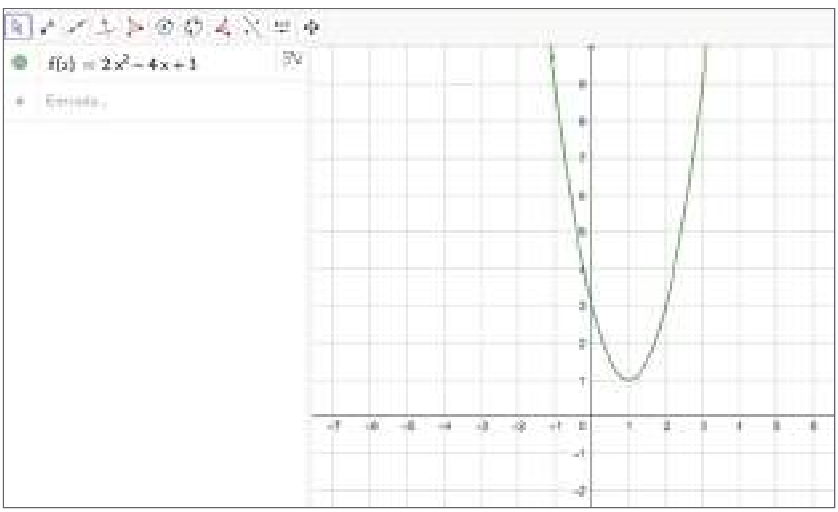


2. Escribe la expresión $2x^2 - 4x + 3$ en **Entrada…**

   Se debe tipear **2*x***2 – 4*x* + 3** y, automáticamente, aparecerá lo siguiente:

3. Observa el plano cartesiano del *software* y responde.

   La gráfica de la función real $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ es la siguiente:



El programa ofrece solo una parte de la representación gráfica de la función, ya que las líneas de la parábola se prolongan indefinidamente «hacia arriba».

- En el ejemplo anterior, ¿tuviste alguna dificultad para utilizar el *software* durante tu construcción?, ¿por qué? Comparte tu respuesta con el curso.
- ¿Qué características pueden destacar de la parábola que representa a la función f en el plano cartesiano? Comuniquen su respuesta al curso y compleméntenla con las que den los otros grupos.

Gráfica de una función cuadrática

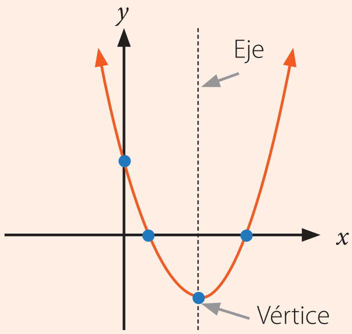
El gráfico de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) se llama **parábola**.

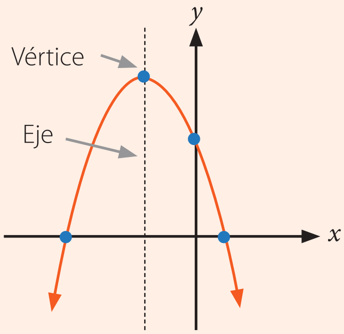
Ya debes tener una idea aproximada de las principales características de una parábola. A continuación, revisaremos algunas de ellas en detalle.

Concavidad de una parábola

En una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, (con $a \neq 0$), el **signo del coeficiente a determina el tipo de concavidad** que tiene la parábola que la representa.

- Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.





En la definición de concavidad, las expresiones «hacia arriba» y «hacia abajo» hacen referencia, respectivamente, a los sentidos positivo y negativo del eje Y.

Ejemplo 3

¿Cómo es la concavidad de la gráfica de la función real $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 1$?

1. Identifica el coeficiente a de la función y si $a > 0$ o $a < 0$.

Software matemático *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_70

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x - 1$$

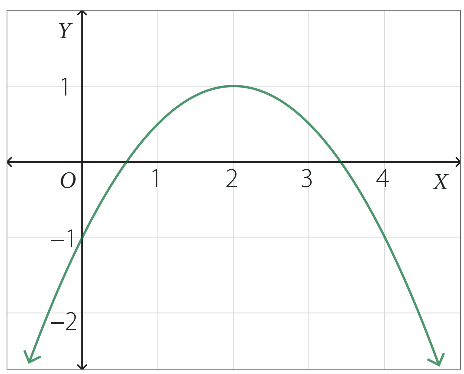
Como se puede observar, $a = -0,5$ y, por lo tanto, se cumple que $a < 0$.

2. Aplica el criterio para determinar la concavidad de la parábola.

La condición $a < 0$ determina que la parábola es cóncava «hacia abajo».

3. Comprueba en un *software* matemático y responde.

La parábola que representa gráficamente a la función real $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 1$ es cóncava «hacia abajo». Esto puede comprobarse observando la gráfica de la función construida con el *software* matemático.



- ¿Cómo identificarías el valor del coeficiente a si la función se expresa con sus términos en diferente orden al que has visto hasta ahora, como por ejemplo para $f(x) = 10 + x^2 - 5x$? Explica a tu curso.

BDA U2_ACT_13

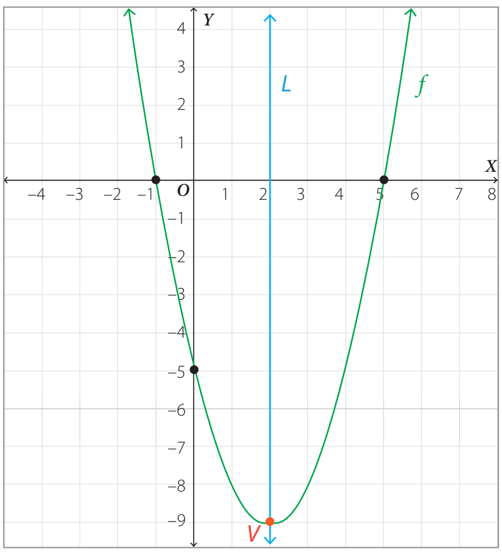
Mary Lucy Cartwright
(1900-1998)

Fue una matemática británica que perteneció a la exclusiva Royal Society. Recibió diversos reconocimientos por sus trabajos relacionados con la teoría del caos. Formuló un método para obtener el valor máximo de funciones, conocido como el teorema de Cartwright.

Ejemplo 4

Respecto de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x - 5$, ¿cuál es su valor máximo o su valor mínimo? ¿Cuál es la ecuación de su eje de simetría?

1. Construye y analiza la parábola que representa a la función.



En la gráfica, se observa lo siguiente:

- La parábola es cóncava hacia arriba, porque el valor del coeficiente a es 1.
- Existe un valor mínimo en el punto $V(2, -9)$.
- El intervalo de que asume para la variable x (dominio de f) son todos los números reales ($\mathbb{R}$).
- El intervalo de valores que asume la variable y (recorrido de f) es $[-9, +\infty[$.
- El eje de simetría corresponde a la recta L de ecuación $x = 2$.

2. Responde.
   - La parábola es cóncava hacia arriba y, por lo tanto, el vértice corresponde al valor mínimo de la función.
   - Su valor mínimo corresponde al punto $V(2, -9)$.
   - La ecuación de su eje de simetría es $x = 2$.

Vértice y eje de simetría de una parábola

En la parábola que representa gráficamente a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) se verifica lo siguiente:

- Tiene un **vértice**, que corresponde a su punto máximo (si $a < 0$) o mínimo (si $a > 0$). El vértice corresponde a $V\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.
- Es simétrica respecto del eje Y (si $b = 0$) o respecto de una recta paralela a él llamada **eje de simetría**. La ecuación del eje de simetría corresponde a $x = -\dfrac{b}{2a}$.

≫ Ejemplo 5

Respecto de las gráficas de las funciones f y g definidas como $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2$, ¿qué se puede concluir al comparar el cambio en el valor de sus variables y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento?

1. Construye tablas de valores de f y g y responde analizando el cambio en el valor de sus variables.

$f(x) = 2x + 3$

	x	y	
	−3	−3	
+1	−2	−1	+2
+1	−1	1	+2
+1	0	3	+2
+1	1	5	+2
+1	2	7	+2
+1	3	9	+2

En la tabla se observa que si el valor de x aumenta en 1, el de y aumenta en 2. Por lo tanto, la pendiente de esta función es constante e igual a 2.

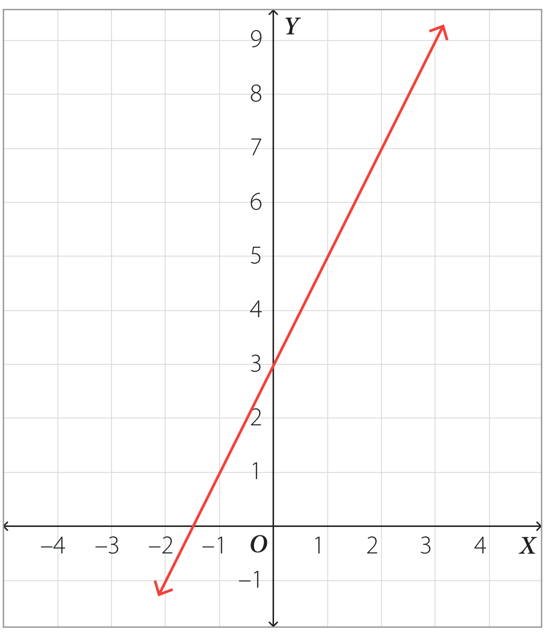
$g(x) = x^2$

	x	y	
	−3	9	
+1	−2	4	−5
+1	−1	1	−3
+1	0	0	−1
+1	1	1	+1
+1	2	4	+3
+1	3	9	+5

En la tabla se observa que si el valor de x aumenta en 1, la variación del valor de y no es constante, ya que disminuye y aumenta en cantidades diferentes. Por lo tanto, la pendiente de esta función no es constante.

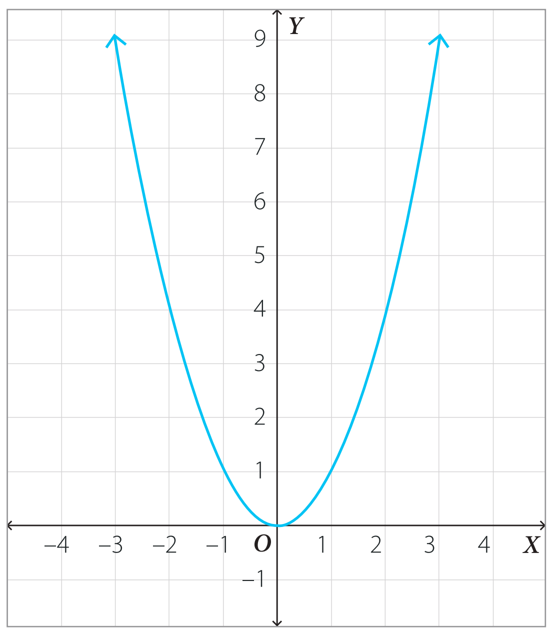
2. Construye las gráficas de f y g y responde analizando sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$f(x) = 2x + 3$



Se observa que la gráfica de la función es creciente en todo su dominio, es decir, en $\mathbb{R}$.

$g(x) = x^2$

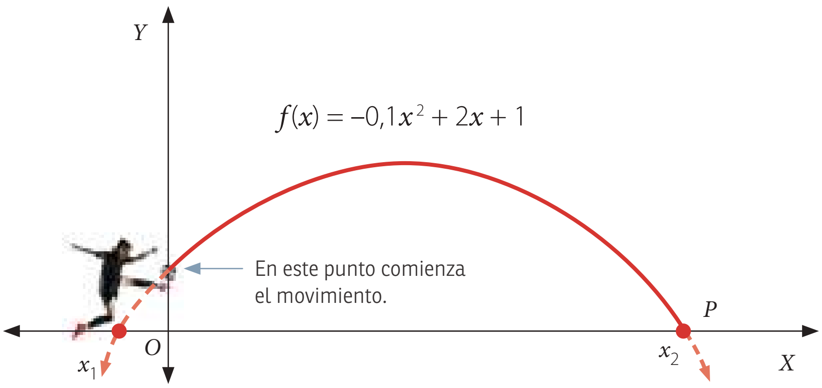


Se observa que la gráfica de la función es decreciente en el intervalo que va de $-\infty$ *a* 0 y es creciente en el intervalo que va de 0 *a* $+\infty$.

BDA U2_ACT_14 U2_AUD_1

Ejemplo 6

Durante un entrenamiento, una futbolista pateó la pelota con todas sus fuerzas y el balón siguió la trayectoria f que se muestra en la imagen, en que x e y están medidos en metros (m). ¿Cuál fue la distancia horizontal que recorrió la pelota hasta impactar el suelo en el punto P?



1. Interpreta la situación.

Dado que la trayectoria del balón se modela mediante una función cuadrática, queda representada por una parábola que se interseca con el eje X en dos puntos, x_1 y x_2, y que este segundo punto de intersección permitirá responder la pregunta planteada en el enunciado.

2. Plantea la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ y reconoce sus coeficientes.

La ecuación es $-0{,}1x^2 + 2x + 1 = 0$ y sus coeficientes son:

$a = -0{,}1$ | $b = 2$ | $c = 1$

3. Resuelve la ecuación cuadrática.

Aplicando la fórmula general de resolución y sustituyendo el valor de los coeficientes, se obtiene lo siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-0{,}1) \cdot 1}}{2 \cdot (-0{,}1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 0{,}4}}{-0{,}2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4{,}4}}{-0{,}2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4{,}4}}{-0{,}2} = \frac{2 - \sqrt{4{,}4}}{0{,}2} \approx -0{,}488 \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4{,}4}}{-0{,}2} = \frac{2 + \sqrt{4{,}4}}{0{,}2} \approx 20{,}488$$

4. Responde.

Como la variable x representa una distancia, solo se considera la solución positiva. Por lo tanto, el balón recorrió aproximadamente 20,5 m antes de impactar el suelo.

Intersección de una parábola con el eje X

La **parábola** que representa a una **función cuadrática** de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, puede intersecarse con el eje X en 1 punto, en 2 puntos o en ningún punto. Para determinarlo, se utiliza el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ asociada a la función f, de manera que se cumple lo siguiente:

- Si $\Delta > 0$, la parábola se interseca con el eje X en **2 puntos**.
- Si $\Delta = 0$, la parábola se interseca con el eje X en **1 punto**.
- Si $\Delta < 0$, la parábola **no se interseca** con el eje X.

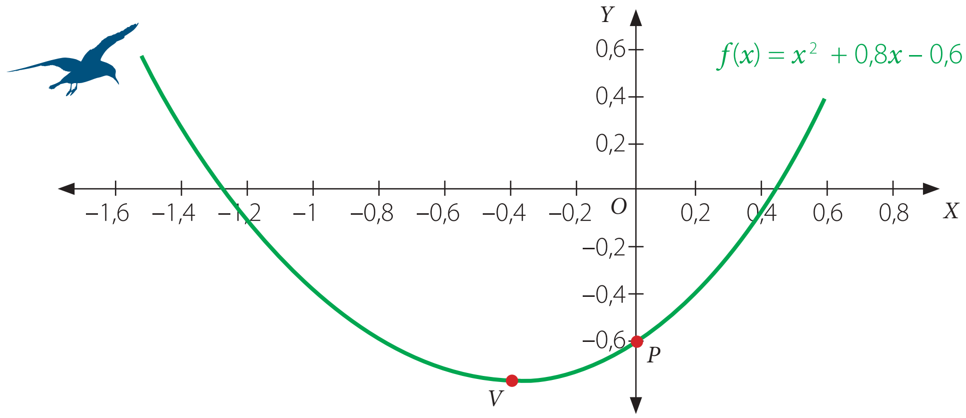
- Teniendo en consideración que la parábola que representa la trayectoria de la pelota en el **Ejemplo 6** y el eje X se intersecan en dos puntos, ¿cuál de las relaciones es correcta en la ecuación $f(x) = 0$: $\Delta > 0$; $\Delta = 0$ o $\Delta < 0$?, ¿por qué?

Intersección de una parábola con el eje Y

La **parábola** que representa a una **función cuadrática** de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, se interseca con el eje Y en un punto cuyas coordenadas son $(0, c)$.

Ejemplo 7

Un pájaro se zambulle en el mar para obtener su alimento. En la imagen se muestra una sección de la representación en el plano cartesiano de la función f, que describe en forma aproximada la trayectoria del ave mediante las variables x, posición del ave en la dirección horizontal (medida en metros), e y, posición del ave en la dirección vertical (medida en metros).



Si el ave obtiene su alimento en el punto P, ¿cuál es la diferencia de profundidad entre este punto y el de la profundidad máxima que alcanza en su trayectoria?

1. Interpreta la situación.
   - El punto P corresponde a la intersección de la trayectoria del ave y el eje Y.
   - El ave alcanza la máxima profundidad en el vértice V de la parábola que representa su trayectoria.
   - Para responder la pregunta, hay que calcular la diferencia entre las ordenadas de los puntos P y V.
2. Identifica los coeficientes de la función.

   $a = 1$ | $b = 0,8$ | $c = -0,6$

3. Determina la ordenada del punto P y la del vértice V de la parábola

Punto P

El punto P corresponde a la intersección de la parábola con el eje Y. Por lo tanto, sus coordenadas son las siguientes:

$$P(0, c) = P(0; -0,6)$$

Punto V

Las coordenadas del vértice V son las siguientes:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = V\left(-\frac{0,8}{2 \cdot 1}, f\left(-\frac{0,8}{2 \cdot 1}\right)\right)$$
$$= V(-0,4; f(-0,4))$$
$$= V(-0,4; (-0,4)^2 + 0,8 \cdot (-0,4) - 0,6)$$
$$= V(-0,4; -0,76)$$

4. Calcula la diferencia entre las ordenadas de los puntos P y V y responde.

$$-0,6 - (-0,76) = -0,6 + 0,76 = 0,16$$

La diferencia de profundidad es 0,16 m.

BDA U2_ACT_15 a 18

Desplazamientos de la gráfica

La oferta se puede definir como la cantidad de unidades de un bien o servicio que están disponibles en el mercado, mientras que la demanda designa la necesidad por el bien o servicio, es decir, la cantidad de unidades que los clientes están dispuestos a adquirir.

La oferta y la demanda afectan a la economía de manera significativa. Si la oferta de un bien o servicio es mayor que la demanda, su precio baja y, en forma complementaria, si la oferta es menor que la demanda, su precio tiende a subir.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_72* para observar una explicación concreta de los conceptos de oferta, demanda y mercado.

Deforestación como consecuencia de la sobreexplotación de la madera.

La actividad económica genera una demanda creciente de recursos naturales y activos ambientales. Dado que muchos de los bienes y servicios que proporciona el medioambiente tienen un precio bajo o son gratuitos, se genera un exceso de demanda por parte de los agentes económicos y esto deviene en una sobreexplotación.

Fuente: Escalante, R. y Catalán, H. (2005). *Economía ambiental: una revisión temática y bibliográfica actual*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Economía.
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_73

Como una forma de replantear los procesos de producción, los patrones de consumo, los materiales, el transporte, la generación de energía, la cadena agroalimentaria, la generación y tratamiento de residuos, entre muchos otros aspectos, se propone la economía circular, que se asocia con los conceptos de reducir, reparar, recuperar, reutilizar y reciclar, y que pretende generar oportunidades de emprendimiento, negocios, empleo e impulso económico para promover la innovación, la productividad y el cuidado medioambiental.

Fuente: Cabrera, F. (Noviembre de 2021). *Economía circular: concepto, implicancias, indicadores y sistemas de monitoreo.* Biblioteca del Congreso Nacional de Chile/BCN.
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_74

- ¿Qué industria nacional piensas que tiene un impacto ambiental negativo? Comenta con tu curso y justifica tu respuesta.
- Averigüen qué es la huella ecológica en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_75* [**Fuente:** Caballero, A. (30 de octubre de 2023). *Huella ecológica: definición, cálculo y reducción*. Climate Consulting by Selectra]. ¿Qué acciones concretas podrían realizar para disminuir su propia huella ecológica? Propongan grupalmente algunas medidas inmediatas y otras que pueden aplicar a mediano plazo, y compártanlas con su curso.
- ¿En qué industrias nacionales han notado que se aplican algunos conceptos de la economía circular?, ¿creen que el aporte de las acciones que implica esta economía es significativo para el cuidado del medioambiente?, ¿por qué?

Ejemplo 1

Considera la función cuadrática $f(x) = 50 - 2x^2$. ¿Cuál es la expresión algebraica que define a la función g si su gráfica se encuentra desplazada «hacia arriba» 10 unidades respecto de la de f?

1. Interpreta la situación.

Dado que la gráfica de g se encuentra desplazada 10 unidades «hacia arriba», se cumple la siguiente relación:

$$g = f + 10$$

2. Resuelve la operación anterior y comprueba graficando las funciones.

Resolviendo, se obtiene lo siguiente:

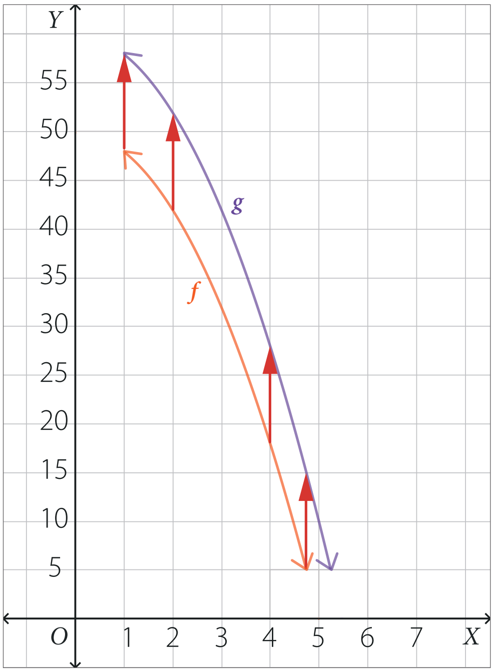
$$g = f + 10$$
$$g = (50 - 2x^2) + 10$$
$$g = 50 - 2x^2 + 10$$
$$g = 60 - 2x^2$$

Una sección de las gráficas de ambas funciones se muestra en la imagen y evidencia el desplazamiento de una gráfica respecto de la otra.

3. Responde.

La función g queda definida por $g(x) = 60 - 2x^2$.

Las flechas ↑ muestran el desplazamiento de 10 unidades «hacia arriba».



- ¿Cómo podrían comprobar el desplazamiento de las gráficas observado en el ejemplo anterior? Utilicen un *software* matemático *online* y respondan.

Software matemático *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_76

Desplazamiento vertical de una parábola

La **parábola** que representa a una **función cuadrática** definida como $f: \mathbb{R} \rightarrow R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se desplaza k unidades a lo largo del eje Y (con $k \in \mathbb{R}$) si se suma k a la función.

- Si $k > 0$, la gráfica de la función real $g(x) = f(x) + k$ está desplazada **«hacia arriba»** en k unidades respecto de la gráfica de $f(x)$.
- Si $k < 0$, la gráfica de la función $g(x) = f(x) + k$ está desplazada **«hacia abajo»** en k unidades respecto de la gráfica de $f(x)$.

BDA U2_ACT_19

Desplazamiento horizontal de una parábola

La **parábola** que representa a una **función cuadrática** definida como $f: \mathbb{R} \rightarrow R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + c$, con $a, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se desplaza r unidades a lo largo del eje X (con $r \in \mathbb{R}$) si la función se evalúa en $(x + r)$.

- Si $r > 0$, la gráfica de la función real $f(x + r) = a(x + r)^2 + c$ está desplazada **«hacia la izquierda»** en r unidades respecto de la gráfica de $f(x)$.
- Si $r < 0$, la gráfica de la función $f(x + r) = a(x + r)^2 + c$ está desplazada **«hacia la derecha»** en r unidades respecto de la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo 2

Una función real f queda definida como $f(x) = -5x^2$. Se van a determinar las funciones g y h, de manera que

- la gráfica de g esté desplazada «hacia la izquierda» en 3 unidades respecto de la de f.
- la gráfica de h esté desplazada «hacia la derecha» en 2 unidades y «hacia abajo» en 1 unidad respecto de la de f.

¿Qué expresiones algebraicas definen a las funciones g y h?

1. Caracteriza las funciones g y h a partir de la función f.

   Función g: como está desplazada 3 unidades «hacia la izquierda», corresponde a $g(x) = f(x + 3)$.

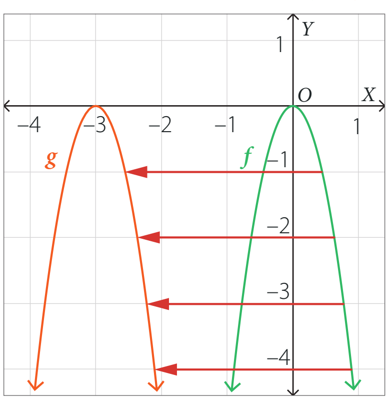
   Función h: como está desplazada 2 unidades «hacia la derecha» y 1 unidad «hacia abajo», corresponde a $h(x) = f(x - 2) - 1$.

2. Desarrolla las expresiones de g y h y comprueba graficando las funciones con un *software* matemático *online*.

   Función g

   $$\begin{aligned} g(x) &= f(x + 3) \\ &= -5(x + 3)^2 \\ &= -5(x^2 + 6x + 9) \\ &= -5x^2 - 30x - 45 \end{aligned}$$

   Gráficas de las funciones f y g

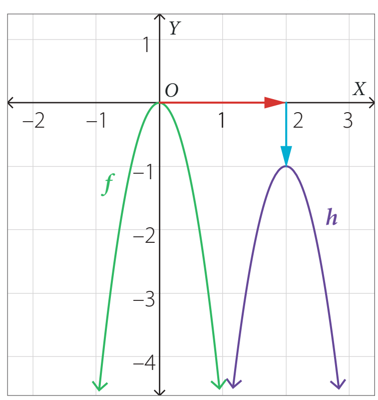
   

   Las flechas muestran el desplazamiento de 3 unidades «hacia la izquierda».

   Función h

   $$\begin{aligned} h(x) &= f(x - 2) - 1 \\ &= -5(x - 2)^2 - 1 \\ &= -5(x^2 - 4x + 4) - 1 \\ &= -5x^2 + 20x - 20 - 1 \\ &= -5x^2 + 20x - 21 \end{aligned}$$

   Gráficas de las funciones f y h

   La flecha muestra el desplazamiento de 2 unidades «hacia la derecha» y la flecha, el movimiento de 1 unidad «hacia abajo».

3. Responde.

   Las funciones de variable real quedan definidas de la siguiente manera:

   $g(x) = -5x^2 - 30x - 45$ $\qquad$ $h(x) = -5x^2 + 20x - 21$

Dilatación y contracción de una parábola

La **parábola** que representa a una **función cuadrática** definida como $g: \mathbb{R} \to R \subset \mathbb{R}$, tal que $g(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$, corresponde a una **dilatación o a una contracción** respecto de la que representa a la función cuadrática $f(x) = x^2$, dependiendo del valor de a.

- Si $a > 1$, la gráfica de la función g se **contrae** respecto de la de la función f, es decir, sus ramas se acercan progresivamente una a la otra y también al eje Y.
- Si $0 < a < 1$, la gráfica de la función se **dilata** respecto de la de la función f, es decir, sus ramas se alejan progresivamente una de la otra y también del eje Y.

Ejemplo 3

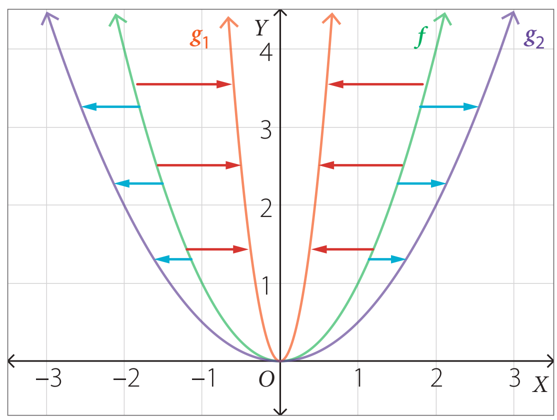
La función real f queda definida como $f(x) = x^2$. Además, se definen las funciones reales $g_1(x) = 10x^2$ y $g_2(x) = 0{,}5x^2$. Se quiere comprobar lo siguiente:

- **respecto de la gráfica de f, la de g_1 corresponde a una contracción.**
- **respecto de la gráfica de f, la de g_2 corresponde a una dilatación.**

¿Son correctas las afirmaciones anteriores? Comprueba graficando las funciones.

1. Caracteriza las funciones g_1 y g_2 respecto de f.
   - En la expresión de la función g_1, se cumple que $a > 1$, por lo tanto, su gráfica corresponde a una contracción respecto de la de la función f.
   - En la expresión de la función g_2, se cumple que $0 < a < 1$, por lo tanto, su gráfica corresponde a una dilatación respecto de la de la función f.
2. Verifica lo anterior graficando las funciones y responde.

   Observando las gráficas que se muestran en la imagen, se comprueba que las afirmaciones son correctas.



Las flechas de color 🔴 muestran una contracción y las flechas de color 🔵, una dilatación.

- ¿Qué variación presenta la gráfica la función $g: \mathbb{R} \to R \subset \mathbb{R}$, tal que $g(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}^-$ y $a \neq -1$, respecto de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = -x^2$ para los casos $a < -1$ y $-1 < a < 0$? Respondan utilizando un *software* matemático *online*.

Software matemático *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_77

Para finalizar la **Lección 1**...

- ¿Qué forma tiene la representación gráfica de una función cuadrática?
- En relación con la gráfica de una función cuadrática f, ¿qué utilidad tiene resolver la ecuación $f(x) = 0$?
- ¿Actuaste con proactividad durante el trabajo en equipo?, ¿por qué?
- ¿Te ayudó a resolver problemas el uso de herramientas computacionales?, ¿por qué?
- ¿Realizas acciones concretas para proteger el entorno natural?, ¿por qué?
- ¿Qué fenómenos puedes modelar usando la función cuadrática?

BDA U2_ACT_4, 5, 20, 21, 22 y 23

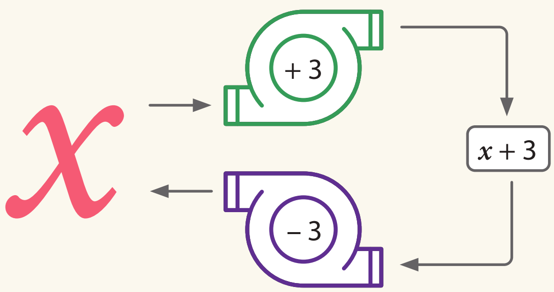
Lección 2 Función inversa

Concepto de función inversa

La reversibilidad del pensamiento puede ser vista como un retorno al punto de partida después de un proceso mental, aplicando un proceso inverso. En general, requiere ser consciente de los pasos que se siguieron en un sentido para poder aplicarlos en sentido inverso.

En matemática se puede constatar que existen relaciones inversas, tales como los pares adición-sustracción y multiplicación-división.

Fuente: Ascencio, R. (3 de abril de 2019). *Reversibilidad en matemáticas: ¿por qué es importante al enseñar y aprender?* Impulso Matemático. http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_78



Plantar un árbol para revertir la tala de un árbol.

La reversibilidad aplicada a la ecología podría establecerse como una prioridad, compensando cada árbol que se tala con un árbol que se planta. Sin embargo, la rapidez de la deforestación impide que esto sea posible. Además, el cambio de la flora nativa, que es reemplazada por foránea, provoca un daño irreparable al medioambiente.

«Siembra por Chile» es un plan con medidas que buscan aportar a la reactivación económica del país, a la mitigación de precios, a la generación de empleos y a la seguridad alimentaria de sus habitantes, con foco especial de inversión en la Agricultura Familiar Campesina (AFC) e Indígena a través del Ministerio de Agricultura y sus servicios como Indap.

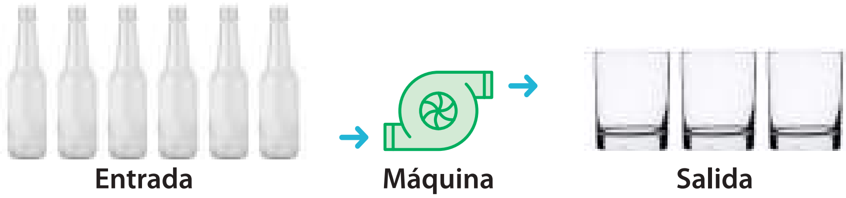
Fuente: Instituto de Desarrollo Agropecuario. (s.f.). *Siembra por Chile*. Ministerio de Agricultura de Chile. http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_79

Fuente: Corporación Nacional Forestal. (16 de mayo de 2024). *Gobierno lanza programa Siembra por Chile con $131 mil millones.* Ministerio de Agricultura de Chile. http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_80

- Además de la adición-sustracción y multiplicación-división, ¿qué otras relaciones matemáticas son inversas? Comenta con tu curso.
- ¿Qué especies de árboles nativos conocen?, ¿qué especies de árboles foráneas existen en nuestro país? ¿Por qué creen que la desaparición de bosque nativo provoca un daño irreversible al medioambiente? Discutan al interior del grupo y compartan sus reflexiones con los otros equipos de trabajo.

Ejemplo 1

Una máquina transforma botellas de vidrio recicladas en vasos de la forma que se muestran en el siguiente esquema:



¿Cómo se puede modelar este proceso?

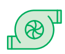
1. Interpreta la situación

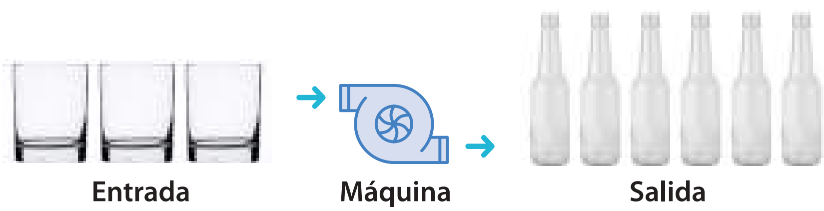
   En el proceso entran 6 botellas y se obtienen 3 vasos, es decir, se puede afirmar que si entran x botellas, se obtienen como resultado $\frac{x}{2}$ vasos.

2. Incorpora el concepto de función en la interpretación anterior y responde.

   El proceso se puede modelar mediante la función $f(x) = y = \frac{x}{2}$, en que x representa la cantidad de botellas que ingresan e y la cantidad de vasos que se obtienen en el proceso.

Ejemplo 2

Considera una máquina que realiza el proceso inverso de la máquina  **, es decir, que convierte vasos de vidrio en botellas de la forma que se muestra a continuación:**



¿Cómo se relaciona este proceso con el del **Ejemplo 1**?

1. Interpreta la situación

   En el proceso entran 3 vasos y se obtienen 6 botellas, es decir, se puede afirmar que si entran x vasos, se obtienen como resultado $2x$ botellas.

2. Incorpora el concepto de función inversa a partir de la interpretación anterior.

   El proceso se puede modelar mediante una función que llamaremos f^{-1}, función inversa de la función f, de manera que se cumple lo siguiente:

$$f^{-1}(x) = y = 2x$$

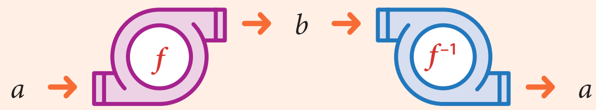
- De los ejemplos anteriores se puede deducir que para que f y f^{-1} sean funciones inversas, debe cumplirse que para cada preimagen x que tiene su imagen y según f, el valor y es preimagen de x según f^{-1}. A partir de esta condición, construye una tabla de valores para f y otra para f^{-1}.

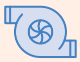
BDA U2_ACT_24

También se puede aplicar la metáfora de la máquina para mostrar la relación existente entre una función y su inversa.

Metáfora de la máquina para relacionar una función y su inversa

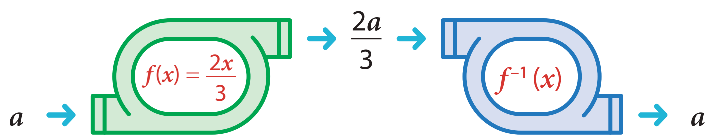
Si se considera a la función real f como una máquina que transforma un número a en otro b (con $a, b \in \mathbb{R}$) a través de un proceso dado, su **función inversa f^{-1}** puede definirse como otra **máquina que permite retornar al valor original del número**, transformando b en a mediante el proceso inverso.



Las máquinas  y  realizan operaciones inversas.

Ejemplo 3

Observa las siguientes máquinas:



¿Qué función real f^{-1} puede asignarse a la máquina azul si f^{-1} es la inversa de f?

1. Reconoce las operaciones que determinan el proceso de la máquina verde.

   La expresión $\frac{2x}{3}$ para un valor de entrada x puede obtenerse realizando las siguientes operaciones:

   - Multiplicación por 2.
   - División por 3.

2. Determina las relaciones inversas de las anteriores.

   Las relaciones inversas, respectivamente, son las siguientes:

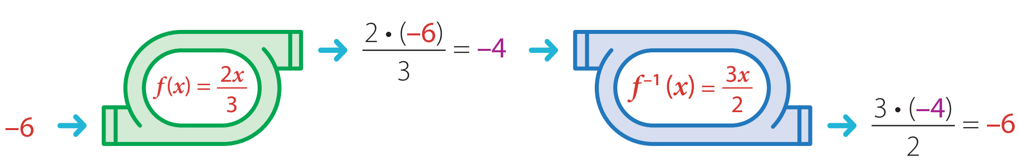
   - División por 2.
   - Multiplicación por 3.

3. Escribe las relaciones inversas usando una expresión algebraica.

   La expresión puede escribirse como $\frac{3x}{2}$.

4. Comprueba y responde.

   Se puede ingresar a las máquinas un valor y aplicar sus procesos. Por ejemplo, usemos el valor –6.



   Por lo tanto, a la máquina azul se le puede asignar la función real $f^{-1}(x) = \frac{3x}{2}$.

- Dado que las funciones f y f^{-1} son inversas, si se ingresa el número 3 a la máquina azul y el valor de salida se ingresa en la máquina verde, ¿qué valor se espera a su salida? Reflexiona sobre la situación y comparte tu respuesta con el curso.

Concepto de función inversa

- Una función f es una relación que a cada elemento de un conjunto le corresponde un único elemento de otro conjunto.

$$x \xrightarrow{\;f\;} f(x)$$

- La función inversa f^{-1} realiza la misma correspondencia, pero en sentido inverso.

$$x \xleftarrow{\;f^{-1}\;} f(x)$$

- Esquemáticamente, la función inversa se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1}(f(x))"'] & f(x) \arrow[r, "f^{-1}"] & x \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4

Considera la función real $f(x) = 3x - 7$. ¿Cuál es su función inversa?

1. Identifica las operaciones que se aplican a un número a para calcular $f(a)$.

   Las operaciones son las siguientes: «Multiplicar por 3 y restar 7».

2. Determina las relaciones que invierten las anteriores.

   Las operaciones son las siguientes: «Sumar 7 y dividir por 3».

3. Expresa matemáticamente las relaciones anteriores.

   «Sumar 7 y dividir por 3» $\rightarrow \dfrac{(x+7)}{3}$

4. Comprueba y responde.

   Definiendo la función real $g(x) = \dfrac{(x+7)}{3}$, se puede calcular $g(f(x))$.

$$g(f(x)) = g(3x - 7) = \frac{(3x - 7 + 7)}{3} = \frac{3x - 7 + 7}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

   Por lo tanto, la función inversa de f es la función real $g(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{(x+7)}{3}$.

- ¿Es la función $f(x) = 3x - 7$ la inversa de la función $g(x) = \dfrac{(x+7)}{3}$? Reflexiona y responde de acuerdo con lo que has estudiado hasta ahora.
- ¿Todas las funciones tienen inversa? Respondan haciendo conjeturas.

BDA U2_ACT_25, 26 y 28

Condiciones para que una función tenga inversa

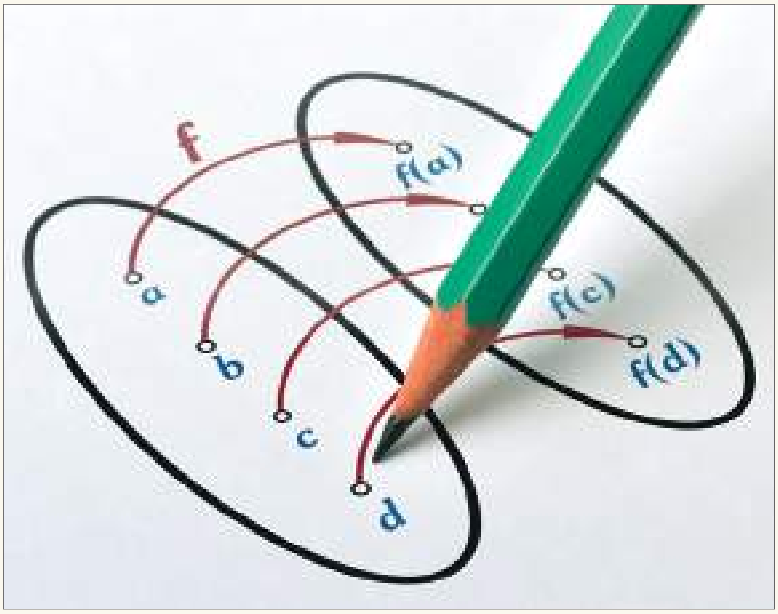
Aunque la noción de función ya puede encontrarse en las tablas que elaboraron los antiguos matemáticos babilonios, es en la Edad Media cuando se incorporan algunos de los elementos modernos que ya conocemos.

En muchos trabajos medievales se observa el uso de relaciones proporcionales que ya dan cuenta del concepto de función, pero como aún no se incorporaban los desarrollos algebraicos ni la noción de continuidad, solo se avanzó en la construcción de gráficas de variaciones entre variables.

Es a partir del siglo XVII que se define una función como una relación entre dos conjuntos que se puede expresar de la forma $y = f(x)$. Es así como se dio una formulación general de función como una relación de correspondencia entre un dominio y un recorrido, que es la forma en que la entendemos actualmente.

Fuente: Díaz, J. (s.f.). *El concepto de función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones.* Universidad de Sonora, México. Disponible en http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_81

Tablilla matemática babilonia.



- ¿Cómo definirías el concepto de función?, ¿con qué fenómenos de tu entorno puedes asociarlo? Reflexiona y responde.
- ¿Qué formas has utilizado para representar funciones? Enumera y explica cada una de ellas.
- ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de una función? ¿Puede una función definirse con distintos dominios y recorridos? Dialoguen al interior del grupo y ejemplifiquen sus argumentos con las funciones que ya conocen.

Funciones inyectivas

La función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ **es inyectiva** si para todo **par de elementos distintos del dominio A, sus imágenes son distintas**. Simbólicamente, esto se expresa como se muestra a continuación:

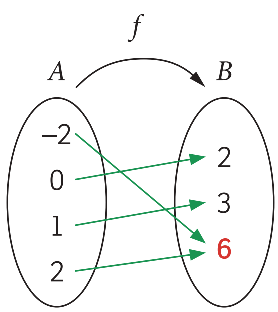
$$\forall\, x_1, x_2 \in A, \text{ tal que } x_1 \neq x_2, \text{ se cumple que } f(x_1) \neq f(x_2)$$

El símbolo $\forall$ se lee «para todo» e indica que para una afirmación deben considerarse «todos y cada uno» de los elementos de un conjunto.

Ejemplo 1

Considera la función f definida como $f(x) = x^2 + 2$, cuyo dominio es el conjunto $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ y su recorrido es $B = \{2, 3, 6\}$. ¿Es f una función inyectiva?

1. Construye el diagrama sagital de la función f.



Un diagrama sagital es una representación que relaciona los elementos de dos conjuntos mediante flechas.

2. Determina si se cumple la condición de inyectividad.

   El elemento 6 de B recibe dos flechas y, por lo tanto, está relacionado con dos elementos diferentes del conjunto A. En otras palabras, como se cumple que $-2 \neq 2$ y $f(-2) = f(2)$, la función f no es inyectiva.

3. Responde.

   La función f no es inyectiva.

- Si en el ejemplo anterior eliminaras el elemento 2 del conjunto A, ¿sería entonces f una función inyectiva?, ¿por qué? Reflexiona y explica.

Ejemplo 2

Considera la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como $g(x) = x^2$. ¿Es g una función inyectiva?

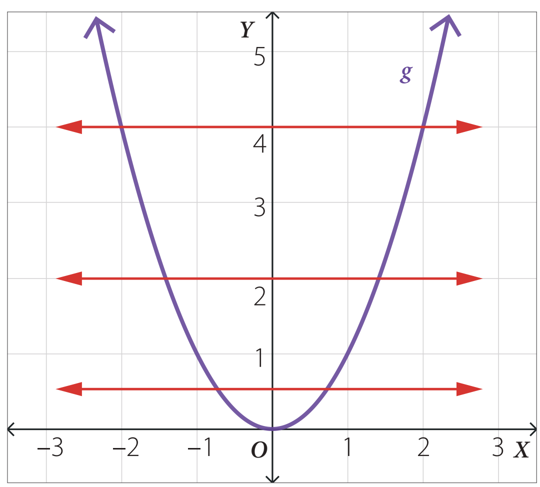
1. Construye la gráfica de la función g y traza rectas paralelas al eje X por puntos que pertenezcan a su recorrido.

2. Determina si se cumple la condición de inyectividad.

   Dado que existe al menos una recta paralela al eje X que se interseca con la gráfica de f en más de un punto, la función f no es inyectiva.

3. Responde.

   La función f no es inyectiva.



- Si en el ejemplo anterior se limitara el dominio de la función g a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, ¿sería entonces g una función inyectiva?, ¿por qué? Reflexionen y expliquen al curso.

BDA U2_ACT_29

Funciones epiyectivas (o sobreyectivas)

La función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ **es epiyectiva** si **todos los elementos del conjunto B forman parte de su recorrido**. Simbólicamente, esto se expresa como se muestra a continuación:

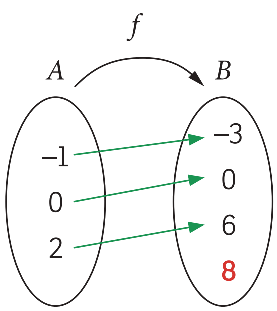
$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A, \text{ tal que } f(x) = y$$

El símbolo ∃ se lee «existe» e indica que para una afirmación «al menos uno» de los elementos de un conjunto la cumple.

Ejemplo 3

Considera la función f definida como $f(x) = 3x$, cuyo dominio es el conjunto $A = \{-1, 0, 2\}$ y su recorrido es $B = \{-3, 0, 6, 8\}$. ¿Es f una función epiyectiva?

1. Construye el diagrama sagital de la función f.



2. Determina si se cumple la condición de epiyectividad.

   El elemento 8 de B no recibe ninguna flecha y, por lo tanto, no está relacionado con ningún elemento del conjunto A. En otras palabras, como no existe ningún elemento x del dominio tal que $f(x) = 8$, la función f no es epiyectiva.

3. Responde.

   La función f no es epiyectiva.

- ¿Qué cambio harías al conjunto B para que la función f sea epiyectiva? Explica a tu curso.

Ejemplo 4

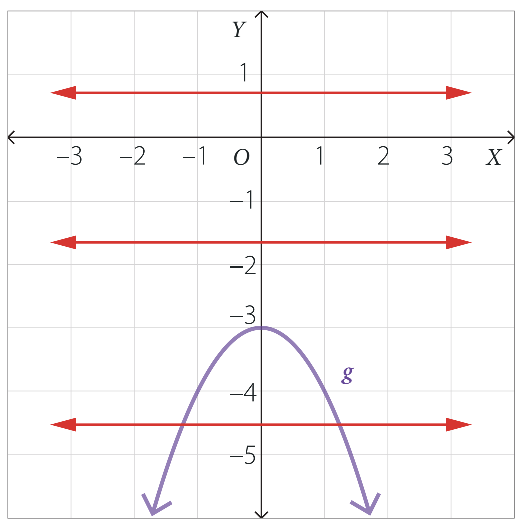
Considera la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -x^2 - 3$. ¿Es g una función epiyectiva?

1. Construye la gráfica de la función g y traza rectas paralelas al eje X por puntos que pertenezcan a su recorrido.
2. Determina si se cumple la condición de epiyectividad.

   Dado que existe al menos una recta paralela al eje X que no se interseca en ningún punto con la gráfica de g, la función g no es epiyectiva.

3. Responde.

   La función f no es epiyectiva.



- En el ejemplo anterior, ¿qué limitaciones harían al recorrido de la función g para hacerla epiyectiva? Propongan las limitaciones, explíquenlas y compártanlas con los otros grupos.

Funciones biyectivas y funciones inversas

- Una función f **es biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva a la vez.
- Para que una **función f tenga inversa,** es decir, para que f^{-1} exista, f debe ser **biyectiva**.

Ejemplo 5

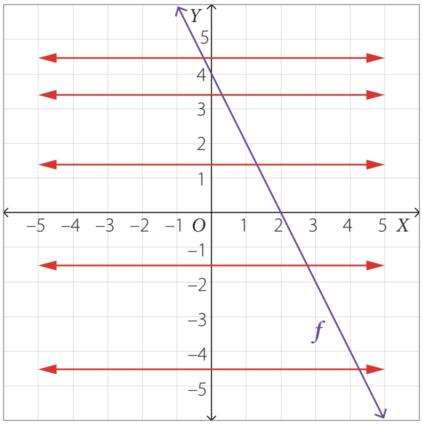
¿Es biyectiva la función afín $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = -2x + 4$?

1. Propón una estrategia que permita evaluar la biyectividad de f.

   Se construirá el gráfico de la función, se trazarán rectas paralelas al eje X por puntos de su recorrido y se constatará si es inyectiva y epiyectiva.

2. Construye la gráfica de f, traza rectas paralelas al eje X que pasen por puntos pertenecientes a su recorrido y observa sus intersecciones con la gráfica.

f es inyectiva
Cada recta se interseca con la gráfica en un único punto.



f es epiyectiva
Todas las rectas se intersecan con la gráfica en al menos un punto.

3. Responde.

   Como f es inyectiva y epiyectiva, entonces, es una función biyectiva.

- En el ejemplo anterior, ¿existe la función inversa de f?, ¿por qué? Explica a tu curso.

Definición de función inversa

Para la función biyectiva $f: A \to B$, existe la función $f^{-1}: B \to A$ que es su inversa. Formalmente, se verifica que

$$\forall\, a \in A, \text{ tal que } f(a) = b, \text{ con } b \in B, \text{ se cumple que } f^{-1}(b) = a$$

Para las funciones f y f^{-1} se cumple lo siguiente:

- $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$
- $\text{Dom}(f) = \text{Rec}(f^{-1})$ y $\text{Rec}(f) = \text{Dom}(f^{-1})$.
- Las gráficas de las funciones f y f^{-1} son el reflejo una de la otra si se toma como eje de simetría la recta $y = x$.

Las abreviaciones «Dom» y «Rec» hacen referencia al dominio y al recorrido de una función, respectivamente.

- Si una función f es biyectiva, ¿es biyectiva también su función inversa f^{-1}? Reflexiona y comenta tu respuesta con el curso.
- Comprueben que las funciones reales $f(x) = -5x$, $g(x) = 0{,}2x - 4$ y $h(x) = -7x + 3$ son biyectivas. Trabajen con un graficador de funciones *online* y conjeturen acerca de la siguiente afirmación: «Las funciones lineales y afines son biyectivas y, por lo tanto, invertibles».

Graficador de funciones *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_82

BDA U2_ACT_30 a 33

Inversas de las funciones lineal, afín y cuadrática

En enero de 2024 realizó su primer viaje el tren más rápido de Sudamérica (hasta la fecha), el que en su primera etapa realizará el servicio entre Estación Central (Santiago) y Curicó. Este tren marca un hito en la modernización y ampliación de los servicios ferroviarios del país. Algunas de sus características son las siguientes:

- Rapidez máxima de 160 km/h.
- Cuatro coches y una capacidad máxima de 238 pasajeros.
- Puertas automáticas de acceso y a nivel.
- Baños con accesibilidad universal.
- Espacios acondicionados para sillas de ruedas.
- Moderna cafetería y servicio a bordo.
- Tren bimodal que puede operar tanto en modo eléctrico como diésel, como una forma de proteger el medioambiente.

↑ Tren más rápido de Sudamérica.

Fuente: Gob.cl. (19 de enero de 2024). *Tren más rápido de Sudamérica inició servicio a Curicó: conozca precios y cómo obtener pasajes*. Gobierno de Chile. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_83*

Dos movimientos rectos característicos de un vehículo son el movimiento rectilíneo uniforme, con rapidez constante, y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

La rapidez es constante y puede modelarse mediante la siguiente expresión:

$$d = d_0 + vt$$

en que las variables involucradas son las siguientes:

- d es la distancia recorrida respecto de un punto de referencia.
- d_0 es la distancia inicial al punto de referencia.
- v es la rapidez constante.
- t es el tiempo transcurrido.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

La aceleración es constante y puede modelarse mediante la siguiente expresión:

$$d = d_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

en que las variables involucradas son las siguientes:

- d es la distancia recorrida respecto de un punto de referencia.
- d_0 es la distancia inicial al punto de referencia.
- v_0 es la rapidez inicial.
- a es la aceleración constante.
- t es el tiempo transcurrido.

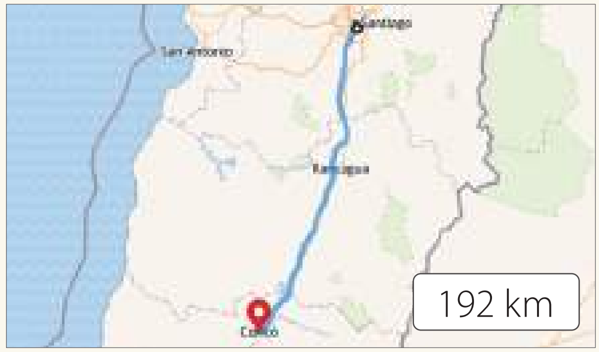
- Si consideraras las fórmulas del MRU y del MRUA como funciones, ¿de qué tipo serían? En cada caso, piensa en la función escrita de la forma $d(t)$ y responde.
- ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones anteriores? Respondan teniendo en cuenta los valores posibles para las variables distancia y tiempo. Comparen su respuesta con las de los otros grupos.

EJEMPLO 1 » Conecta con **Física**.

El movimiento rectilíneo uniforme (MRU) que has estudiado en Física se realiza manteniendo constante la rapidez.

Supón que el tren más rápido de Sudamérica se mueve con una rapidez constante de 120 km/h y considera la distancia entre Santiago y Curicó que se muestra en la imagen.

Captura realizada de *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_84.* ➔



¿Cuál es la función $t(d)$, inversa de la función $d(t)$ que modela el MRU del tren?, ¿cuánto tiempo demoraría, aproximadamente, en recorrer la distancia entre Santiago y Curicó, suponiendo que sigue una trayectoria recta y que posee la rapidez de 120 km/h a partir de $t = 0$?

1. Modela con una función $d(t)$ el MRU e identifica su dominio y recorrido.

Como la expresión que relaciona el MRU es $d = d_0 + vt$, la función correspondiente es:

$$d(t) = d_0 + vt$$

cuyo dominio y recorrido corresponde a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, ya que la distancia y el tiempo solo pueden tomar valores positivos o 0.

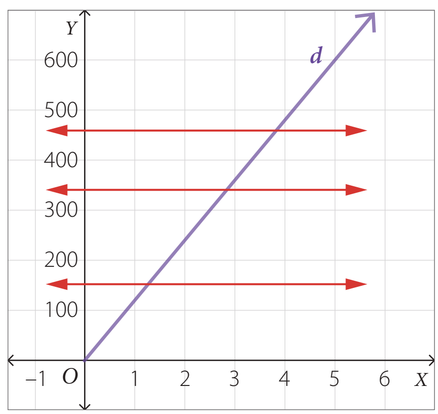
2. Reemplaza los datos en la expresión de la función $d(t)$.

- Como el tren parte de Santiago, se puede tomar a esta ciudad como punto de referencia, en cuyo caso se cumple que $d_0 = 0$.
- La rapidez es constante y se mide en kilómetros por hora. Por lo tanto, $v = 120$.

$$d(t) = 0 + 120t$$
$$d(t) = 120t$$

3. Determina si la función $d(t)$ es invertible.

Teniendo en cuenta que $\text{Dom}(d) = \text{Rec}(d) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se dibujan rectas que pasen por puntos pertenecientes al recorrido de la función d y se constata que la función es inyectiva y epiyectiva. Por lo tanto, la función d sí es invertible.



4. Despeja la variable t y escríbela en función de la variable d.

$$d = 120t \leftrightarrow t = \frac{d}{120}$$

5. Responde.

- La función $t(d)$ se define como sigue:

$$t: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \text{ tal que } t(d) = \frac{d}{120}$$

- A 120 km/h, una estimación para el tiempo que el tren demoraría en recorrer la distancia entre Santiago y Curicó es $t(192) = \frac{192}{120} = 1{,}6$, es decir, 1,6 h = 96 min.

- La función $f(x) = 120x$, ¿sería biyectiva también si se considerara $\text{Dom}(f) = \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$? Reflexiona y comparte tu respuesta con el curso.

BDA U2_ACT_34 U2_IMA_2

A continuación, estudiaremos la existencia o no de las inversas para las funciones que ya conoces: funciones lineal, afín y cuadrática. Comenzaremos por las dos primeras.

Funciones inversas de las funciones lineal y afín

- La **inversa de la función lineal** definida como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{f(x) = mx}$, con $m \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, corresponde a la función $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{m}$, la cual también es una función lineal.
- La **inversa de la función afín** definida como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{f(x) = mx + n}$, con $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, $n \neq 0$, corresponde a la función $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{m} - \dfrac{n}{m}$, la cual también es una función afín.

Ejemplo 2

¿Cuál es la inversa de la función real $f(x) = 7x + 10$?

1. Identifica la función y determina si es invertible.

   La función real definida por $f(x) = 7x + 10$ es afín, es decir, tiene la forma $f(x) = mx + n$ con parámetros $m = 7$ y $n = 10$. Por lo tanto, es invertible en todo su dominio.

2. Aplica una estrategia para obtener la función inversa.

   - Escribe la expresión de la función en la forma $y = f(x)$.

   $$y = 7x + 10$$

   - Intercambia las variables x e y.

   $$x = 7y + 10$$

   - Despeja la variable y.

   $$\begin{aligned} x &= 7y + 10 \\ x - 10 &= 7y \\ \frac{x}{7} - \frac{10}{7} &= y \end{aligned}$$

   - Escribe la expresión obtenida como $f^{-1}(x) = y$.

   $$f^{-1}(x) = \frac{x}{7} - \frac{10}{7}$$

   - Comprueba el resultado anterior.

   $$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{7} - \frac{10}{7}\right) = 7 \cdot \left(\frac{x}{7} - \frac{10}{7}\right) + 10 = (x - 10) + 10 = x$$

   $$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(7x + 10) = \frac{7x + 10}{7} - \frac{10}{7} = \frac{7x}{7} + \frac{10}{7} - \frac{10}{7} = x$$

3. Responde.

   La inversa de la función real $f(x) = 7x + 10$ es la función real $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{7} - \dfrac{10}{7}$.

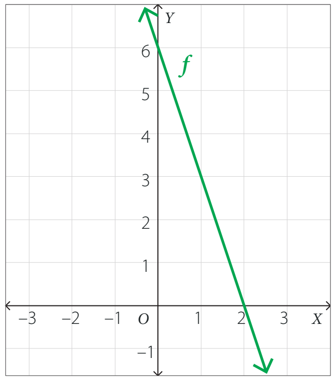
- Observa la expresión de la función f^{-1} obtenida en el ejemplo anterior. ¿Cómo determinarías sus parámetros m y n, que caracterizan a la función afín?
- ¿Qué relación existe entre los parámetros m (pendiente) de las funciones f y f^{-1}?, ¿es siempre así? Reflexiona y generaliza la relación.

Gráfica de las funciones inversas de las funciones lineal y afín

- La gráfica de la **inversa de una función lineal** f es una recta que pasa por el origen y que corresponde a una **reflexión de la gráfica de f respecto de la recta $y = x$**.
- La gráfica de la **inversa de una función afín** f es una recta que corresponde a una **reflexión de la gráfica de f respecto de la recta $y = x$**.

Ejemplo 3

La gráfica de la función real $f(x) = -3x + 6$ se muestra en la imagen. ¿Cuál es la gráfica de la función f^{-1}, inversa de f?



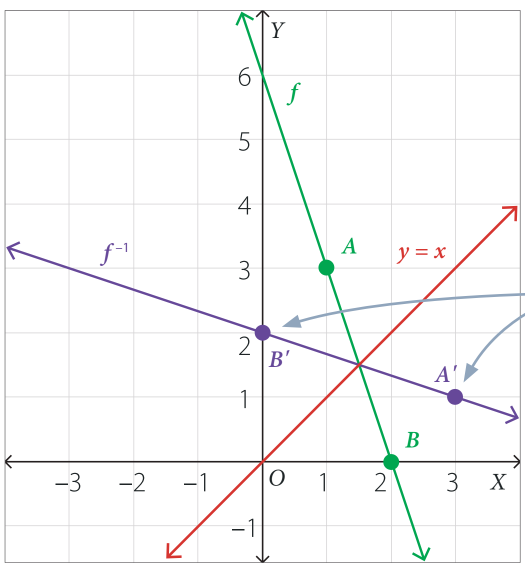
Gráfica de la función f.

1. Identifica la función y determina si es invertible.

   Dado que f es una función afín, es invertible en todo su dominio.

2. Aplica una reflexión de la gráfica de f respecto de la recta $y = x$.

   En la siguiente gráfica, en rojo se muestra la recta $y = x$ y en azul, la recta reflejada:



Si el punto (x, y) pertenece a la recta que representa a f, el punto (y, x) pertenece a la recta que representa a f^{-1}.

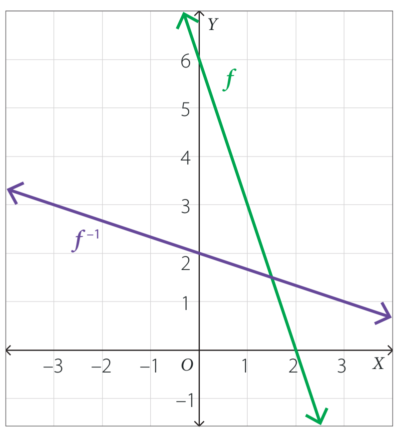
A partir de los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 0)$ pertenecientes a la gráfica de la función f, se determinan dos puntos de la recta reflejada: $A'(3, 1)$ y $B'(0, 2)$.

3. Comprueba y responde.

   Se calcula la inversa de la función real $f(x) = -3x + 6$.

$$y = -3x + 6 \rightarrow x = -3y + 6 \rightarrow 3y = -x + 6 \rightarrow y = \frac{-x}{3} + 2$$

   Graficando la función real f^{-1}, se observa que coincide con la obtenida en el paso anterior, y es la que se muestra en la imagen.



BDA U2_ACT_35 a 38

Ahora veremos que la existencia de la inversa de una función cuadrática depende de cómo se definan su dominio y recorrido.

Ejemplo 4

¿Existe la inversa de la función cuadrática $f: \mathbb{R} \to [-3, +\infty[$ definida como $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$?

1. Analiza la función f.

   Se mostró anteriormente que la función cuadrática no tiene función inversa en todo su dominio real, ya que no es inyectiva. Por ejemplo, en particular para la función f, se cumple lo siguiente:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 5 = 2 \cdot 1 - 8 + 5 = 2 - 8 + 5 = -1$$

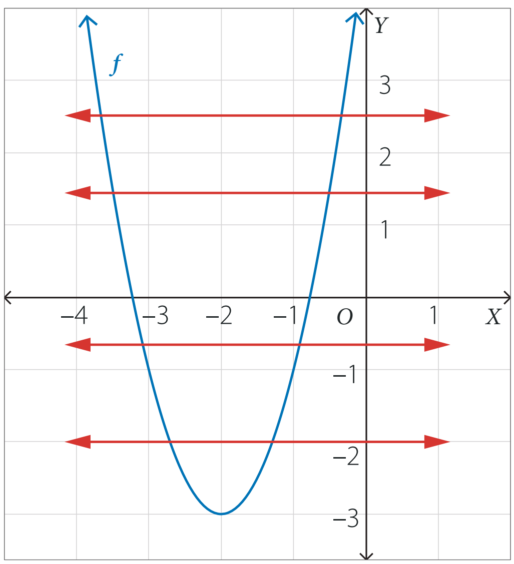
$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot (-3) + 5 = 2 \cdot 9 - 24 + 5 = 18 - 24 + 5 = -1$$

   Es decir, para $-1 \neq 3$ se cumple que $f(-1) = f(-3)$.

2. Construye la gráfica de la función f y traza rectas paralelas al eje X por puntos que pertenezcan a su recorrido.

   Para visualizar que la función f es epiyectiva, pero no inyectiva, se trazan rectas paralelas al eje X y se observan sus intersecciones con la gráfica de la función.

Todas las rectas paralelas al eje X que pasan por puntos que pertenecen a su recorrido se intersecan con la gráfica de f en al menos un punto. Por lo tanto, la función f es epiyectiva.



Dado que existe al menos una recta paralela al eje X que se interseca con la gráfica de f en más de un punto, la función f no es inyectiva.

3. Responde.

   Dado que la función f no es inyectiva y, por lo tanto, no es biyectiva, se concluye que su inversa no existe.

- En el ejemplo anterior se mostró que la función cuadrática definida como $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ no tiene función inversa. Pero, ¿ocurre esto para todas las funciones cuadráticas? Grafica distintas funciones cuadráticas usando un graficador de funciones *online* y responde.

Graficador de funciones *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_85

- En el **Ejemplo 4**, si se ampliara el recorrido de la función f, definiéndolo como Rec(f) = $\mathbb{R}$, ¿seguiría f siendo una función epiyectiva?, ¿por qué?
- ¿Qué restricción aplicarían al dominio de una función cuadrática para que sea biyectiva? Reflexionen al interior del grupo y comparen su respuesta con las de otros equipos de trabajo.

Inversa de una función cuadrática

Para definir la inversa de una **función cuadrática** se debe restringir su dominio, dividiéndolo en dos tramos separados por el vértice de la representación gráfica.

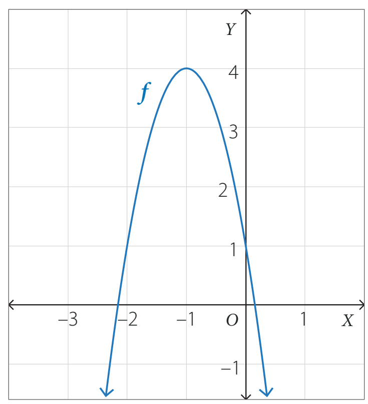
La función cuadrática definida por $f\colon \mathbb{R} \rightarrow R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, puede definirse en dos intervalos diferentes de su dominio, tramos que quedan definidos por las coordenadas del vértice de la parábola que representa a f en el plano cartesiano. A las funciones así definidas las llamaremos f_1 y f_2, ambas biyectivas, de manera que

- $f_1\colon \left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right] \rightarrow R \subset \mathbb{R}$, y su función inversa es $f_1^{-1}(x) = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$.
- $f_2\colon \left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[\rightarrow R \subset \mathbb{R}$, y su función inversa es $f_2^{-1}(x) = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$.

- El recorrido de la función varía dependiendo del valor del coeficiente a.
  - Si $a > 0$, el recorrido es $R = \left[f\left(-\dfrac{b}{2a}\right), +\infty\right[$.
  - Si $a < 0$, el recorrido es $R = \left]-\infty, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right]$.
- Las gráficas de f_1 y f_1^{-1} y las de f_2 y f_2^{-1} son el reflejo una de la otra respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 5

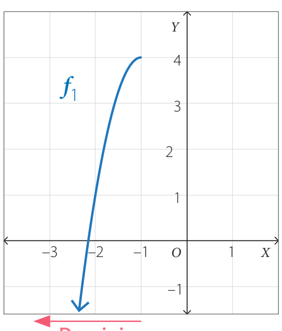
¿Cuál es la inversa de la función cuadrática $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \left]-\infty, 4\right]$ definida como $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$, cuya gráfica se muestra en la imagen?



Gráfica de la función f.

1. Considerando que $a = -3$, $b = -6$ y $c = 1$, analiza el dominio de la función en dos intervalos diferentes y expresa la función inversa en ellos.

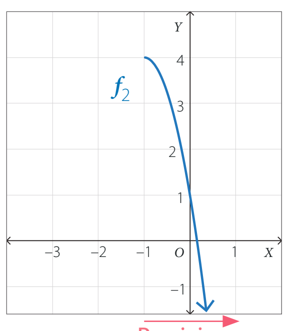
Tramo 1: $\left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right] = \left]-\infty, -1\right]$



La inversa es

$$f_1^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$$
$$= \frac{6 + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-3)(1-x)}}{2 \cdot (-3)}$$
$$= \frac{6 + \sqrt{36 + 12 \cdot (1-x)}}{-6}$$
$$= \frac{-6 - \sqrt{48 - 12x}}{6}$$

Tramo 2: $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[= \left[-1, +\infty\right[$



La inversa es

$$f_2^{-1}(x) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$$
$$= \frac{6 - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-3)(1-x)}}{2 \cdot (-3)}$$
$$= \frac{6 - \sqrt{36 + 12 \cdot (1-x)}}{-6}$$
$$= \frac{-6 + \sqrt{48 - 12x}}{6}$$

Observa que se cumple que:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot (-3)} = -\frac{-6}{2 \cdot (-3)} = -\frac{-6}{-6} = -1$$

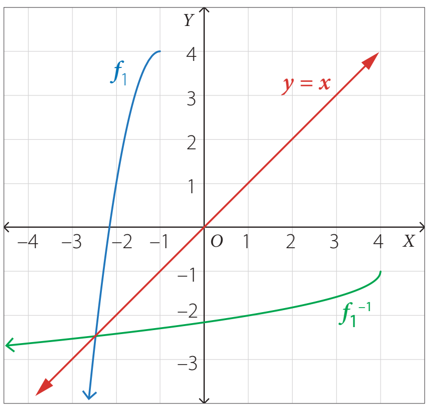
2. Grafica las funciones inversas para verificar que corresponden a reflexiones de la función f.

Tramo 1:

$\text{Dom}(f) =]-\infty, -1]$ | $\text{Rec}(f) =]-\infty, 4]$

Gráficas de $f_1(x) = -3x^2 - 6x + 1$ y

$$f_1^{-1}(x) = \frac{-6 - \sqrt{48 - 12x}}{6}$$



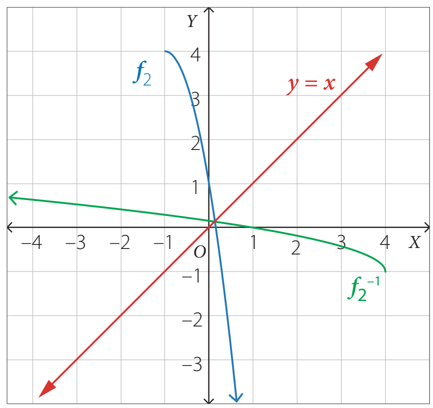
Se observa que las gráficas de f_1 y f_1^{-1} son el reflejo una de la otra respecto de la recta $y = x$.

Tramo 2:

$\text{Dom}(f) = [-1, +\infty[$ | $\text{Rec}(f) =]-\infty, 4]$

Gráficas de $f_2(x) = -3x^2 - 6x + 1$ y

$$f_2^{-1}(x) = \frac{-6 + \sqrt{48 - 12x}}{6}$$



Se observa que las gráficas de f_2 y f_2^{-1} son el reflejo una de la otra respecto de la recta $y = x$.

Observa que se cumple que:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-1)$$
$$= -3 \bullet (-1)^2 - 6 \bullet (-1) + 1$$
$$= -3 \bullet 1 + 6 + 1$$
$$= -3 + 6 + 1$$
$$= 4$$

3. Responde.

La inversa de la función cuadrática $f: A \subset \mathbb{R} \to]-\infty, 4]$ definida como $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$, depende del dominio que se considere.

- Para $\text{Dom}(f) =]-\infty, -1]$, la función inversa es:

$$f_1^{-1}:]-\infty, 4] \to]-\infty, -1], \text{ tal que } f_1^{-1}(x) = \frac{-6 - \sqrt{48 - 12x}}{6}$$

- Para $\text{Dom}(f) = [-1, +\infty[$, la función inversa es:

$$f_2^{-1}:]-\infty, 4] \to [-1, +\infty[, \text{ tal que } f_2^{-1}(x) = \frac{-6 + \sqrt{48 - 12x}}{6}$$

- En el ejemplo anterior, ¿cuál debería ser el valor de $f_1(f_1^{-1}(x))$, $f_2(f_2^{-1}(x))$, $f_1^{-1}(f_1(x))$ y $f_2^{-1}(f_2(x))$?, ¿por qué? Reflexiona y explica a tu curso.
- A continuación, analicen lo que escribió Paz en su cuaderno:

Para la función cuadrática $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como $f(x) = x^2$, se define su función inversa como $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

¿Es correcto lo que afirma?, ¿por qué? Reflexionen y compartan sus argumentos con el curso.

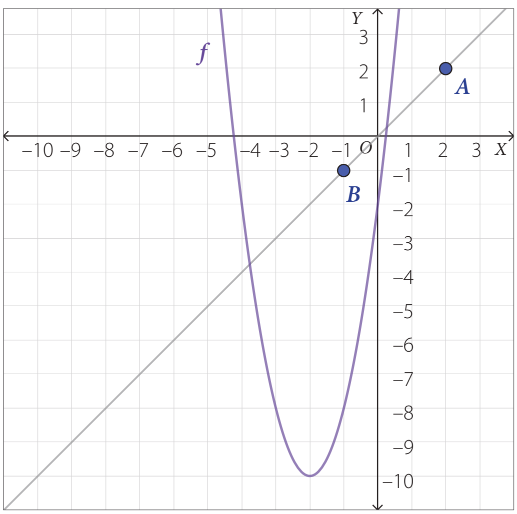
Utilizando un *software* matemático *online* puedes trazar rápidamente las gráficas de las inversas de funciones cuadráticas, aplicando la propiedad de reflexión respecto de la recta $y = x$.

Software matemático *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU2_86

Ejemplo 6

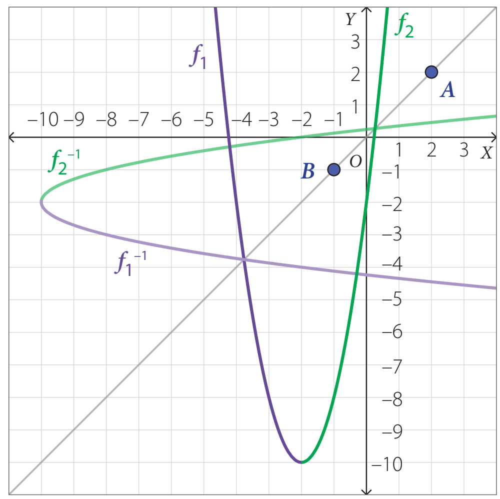
¿Cuál es la gráfica de la inversa de la función cuadrática $f: \mathbb{R} \to [-10, +\infty[$ definida como $f(x) = 2x^2 + 8x - 2$? Utiliza un *software* matemático *online* para responder. En tu análisis, considera dos intervalos para el dominio de la función: $]-\infty, -2]$ y $[-2, +\infty[$, ya que el *software* no solicita dominio ni recorrido, sino que solo refleja las gráficas.

1. Traza la gráfica de la función f en el *software* y dibuja la recta de ecuación $y = x$.
   - Escribe en la barra de entrada la expresion de la funcion: $f(x) = 2x^2 + 8x - 2$.
   - Selecciona dos puntos (x, y) del plano con el botón , tales que $x = y$. Por ejemplo, $A(2, 2)$ y $B(-1, -1)$. Luego, selecciona el botón y haz clic en los dos puntos anteriores.



2. Refleja la parábola respecto de la recta $y = x$ y responde.

   Selecciona el botón , luego haz clic primero sobre la parábola y luego sobre la recta.



En la captura, se han coloreado de un mismo color las funciones f_1 (definida en $]-\infty, -2]$) y su inversa f_1^{-1}, y f_2 (definida en $[-2, +\infty[$)y su inversa f_2^{-1}.

Para finalizar la **Lección 2**...

- ¿Con qué fenómeno de tu entorno asocias el concepto de función inversa?, ¿por qué?
- ¿Cómo se relacionan la reflexión y la gráfica de la función inversa?
- ¿Crees que fuiste creativo durante la resolución de los problemas de la lección?, ¿por qué?
- ¿Qué dificultades tuviste para transitar entre los distintos niveles de representación de funciones?
- ¿Cuál piensas que fue el propósito de usar herramientas tecnológicas durante el trabajo con funciones?
- ¿Crees que el uso de energías limpias ayuda de manera relevante a cuidar el medioambiente?, ¿por qué?

BDA U2_ACT_27, 39, 40, 41, 42 y 43

Síntesis de Unidad 2 • Álgebra y funciones

Lección 1 • Función cuadrática

Aprendiste...

Definición de función y ecuación cuadrática

- **Ecuación cuadrática.**

  Una ecuación cuadrática se expresa como $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

  Para resolverla, se pueden aplicar diferentes métodos: usar la raíz cuadrada, factorizar, completar cuadrados o utilizar la fórmula general.

- **Función cuadrática.**

  Una función cuadrática puede definirse por $f: \mathbb{R} \to R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Gráfica de la función cuadrática

- **Gráfica de una función cuadrática.**

  La gráfica de una función cuadrática corresponde a una figura llamada parábola.

- **Vértice y eje de simetría de una parábola (con $a \neq 0$).**
  - Las coordenadas del vértice son

  $$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

  - La ecuación del eje de simetría es $x = -\dfrac{b}{2a}$.

- **Intersección de una parábola con el eje X.**

  El valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ determina la intersección de la parábola con el eje X.
  - Si $\Delta > 0$, se interseca con el eje X en dos puntos.
  - Si $\Delta = 0$, se interseca con el eje X en un punto.
  - Si $\Delta < 0$, no se interseca con el eje X.

- **Intersección de una parábola con el eje Y.**

  La parábola que representa a una función cuadrática se interseca con el eje Y en el punto $(0, c)$.

Desplazamientos de la gráfica

- **Desplazamientos vertical y horizontal.**
  - La parábola que representa a una función cuadrática $f: \mathbb{R} \to R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se desplaza k unidades a lo largo del eje Y (con $k \in \mathbb{R}$) si se suma k a la función f.
  - La parábola que representa a una función cuadrática $f: \mathbb{R} \to R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se desplaza r unidades a lo largo del eje X (con $r \in \mathbb{R}$) si se evalúa la función en $(x + r)$.

- **Dilatación y contracción.**

  La parábola que representa a una función cuadrática definida como $g: \mathbb{R} \to R \subset \mathbb{R}$, tal que $g(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$, corresponde a una dilatación o a una contracción respecto de la que representa a la función cuadrática $f(x) = x^2$, dependiendo del valor de a.

¿Sentiste curiosidad por resolver los problemas y desafíos de la lección?, ¿por qué?

Lograste...

- Comprender y valorar la perseverancia y la flexibilidad.
- Reconocer la importancia del trabajo como forma de desarrollo personal y social.
- Proteger el entorno natural como contexto de desarrollo humano.

¿Cuánto valoras la perseverancia?, ¿y la flexibilidad?, ¿por qué?

¿Qué acciones deberían tomarse para proteger el entorno natural?, ¿cómo te gustaría participar en ellas?

Aplicaste...

- Modelos en que dos variables dependen cuadráticamente.
- Lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos de la ciencia.
- Estrategias para analizar información representada en tablas y gráficos.

Lección 2 • Función inversa

Aprendiste...

Concepto de función inversa

Metáfora de la máquina.

Si se considera a la función real f como una máquina que transforma un número a en otro b (con $a, b \in \mathbb{R}$) a través de un proceso, su función inversa f^{-1} es otra máquina que transforma b en a mediante el proceso inverso.

Condiciones para que una función tenga inversa

- Una función es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva a la vez. Una función tiene función inversa si es biyectiva.
- **Función inversa.**

  Para la función biyectiva $f: A \to B$, existe la función $f^{-1}: B \to A$ que es su inversa. Formalmente, se verifica que

  $\forall\, a \in A$, tal que $f(a) = b$, con $b \in B$, se cumple que $f^{-1}(b) = a$

Inversas de las funciones lineal, afín y cuadrática

- **Inversas de las funciones lineal y afín.**
  - La inversa de la función lineal definida como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = mx$, con $m \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, corresponde a la función $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \frac{x}{m}$.
  - La inversa de la función afín definida como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, $n \neq 0$, corresponde a la función $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \frac{x}{m} - \frac{n}{m}$.
- **Inversa de la función cuadrática.**

  La función cuadrática definida por $f: \mathbb{R} \to R \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ puede considerarse en dos intervalos diferentes de su dominio. Así se definen las funciones f_1 y f_2, ambas biyectivas, de manera que

  → $f_1: \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \to R \subset \mathbb{R}$, y su función inversa es $f_1^{-1}(x) = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - x)}}{2a}$

  → $f_2: \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[\to R \subset \mathbb{R}$, y su función inversa es $f_2^{-1}(x) = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c - x)}}{2a}$

¿Fue responsable y proactivo el trabajo en equipo que realizaste en esta lección?, ¿en qué se reflejó esto?

Lograste...

- Exponer ideas de manera coherente y fundamentada.
- Resolver problemas utilizando modelos y rutinas, y aplicando de manera creativa conceptos y criterios.
- Trabajar en equipo de forma responsable, construyendo relaciones basadas en la confianza mutua.

¿Expusiste tus ideas durante el trabajo en equipo?, ¿por qué?

¿Qué dificultades tuviste para resolver los problemas de esta lección?, ¿cómo las superaste?

Aplicaste...

- Metáforas y analogías para resolver problemas.
- Lenguaje matemático, esquemas y gráficos para describir relaciones y situaciones matemáticas.
- El análisis para transitar entre distintos niveles de representación de funciones.

BDA U2_ACT_44 y 45

Unidad 3
Geometría

Vista aérea.

Estadio Bicentenario de La Florida.

En esta unidad estudiarás las razones trigonométricas, aplicándolas en la resolución de problemas relacionados con los deportes y con el entorno natural que te rodea.

Shuttestock/Lighthouse Films

El Estadio Bicentenario de La Florida fue inaugurado en 1986 y remodelado en 2008. Tiene una capacidad para 11 376 espectadores y fue sede de la Copa del Mundo Femenina sub-20 de fútbol en 2008.

En este estadio se realizó la ceremonia de clausura de los Juegos Panamericanos Santiago 2023 el 5 de noviembre de 2023.

Fuente: Santiago 2023. emol.com. Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_27*.

La competencia de fútbol para personas con parálisis cerebral (fútbol PC) como parte de los Juegos Parapanamericanos Santiago 2023, se llevó a cabo íntegramente en el Estadio Bicentenario de La Florida entre el 18 y el 25 de noviembre de 2023.

Fuente: Santiago 2023. (15 de noviembre de 2023). ¿Qué es el fútbol PC? Las reglas de la disciplina en los Parapanamericanos Santiago 2023. ***Chilevisión***. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_28*

1. ¿Conoces alguno de los recintos de la Red de Estadios Bicentenarios?, ¿qué opinas acerca del aporte que significa para la práctica del deporte el contar con estadios modernos como el mostrado en la imagen? Comenta con tu curso.

2. ¿De qué manera determinarías la medida de la diagonal de la cancha del estadio mostrado en la imagen? Comparte tu procedimiento con el curso.

Habilidades del **siglo XXI**

La matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender a pensar y para resolver problemas. Reflexionar sobre los procedimientos, propios o de otros, comparar o sostener intercambios sobre situaciones matemáticas, optimiza el proceso de aprendizaje.

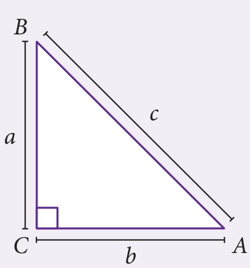
- ¿Por qué crees que se dice que la matemática utiliza un lenguaje universal?
- Al resolver problemas, ¿reflexionas sobre el procedimiento empleado? Explica.

Conocimientos previos

- Estos contenidos te ayudarán a abordar el trabajo de esta unidad.

Triángulo rectángulo

En el triángulo rectángulo ABC que se muestra, se tiene que la medida de sus catetos están representados por las letras a y b, mientras que la de la hipotenusa con la letra c.



Teorema de Pitágoras

La suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa, es decir, en el triángulo ABC se cumple la relación $a^2 + b^2 = c^2$.

Semejanza

Dos triángulos son semejantes (~) si tienen la misma forma, aunque sean de diferente tamaño. En dos triángulos semejantes las medidas de los lados homólogos son proporcionales.

- ¿Cuál de estos contenidos necesitas repasar? Coméntalo con tu curso.

BDA U3_ACT_1 U3_VID_1

Lección 1

Razones trigonométricas

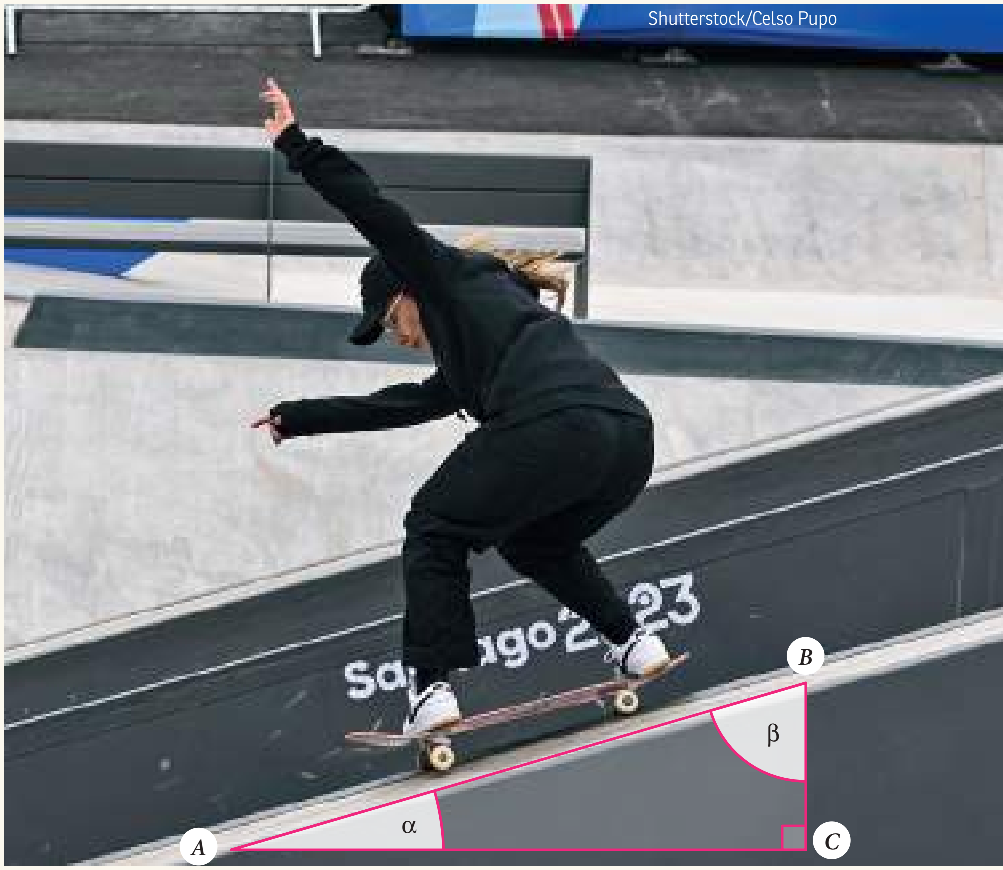
Razones trigonométricas en nuestro entorno

En los Juegos Panamericanos Santiago 2023 hizo su debut el ***skateboarding***, deporte que tiene su origen en Estados Unidos, ya que en los días que no había buenas olas, los surfistas probaron agregarle ruedas a sus tablas y salir a patinar.

En Santiago 2023 hubo dos disciplinas en el programa de ***skateboarding***: ***street*** y ***park***. En ambas modalidades, los participantes tuvieron 60 segundos para mostrar su rutina en las categorías masculina y femenina, donde los jueces les asignaban de 0 a 100 puntos.

La categoría ***street*** se desarrolló en un recorrido con escaleras, pasamanos, bordes, bancos de parques, paredes y cuestas que simulaban una pista urbana.

Fuente: Juegos Panamericanos y Parapanamericanos. ***Skateboarding***. Ministerio del Deporte de Chile. Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_29*.



Shutterstock/Celso Pupo

En este deporte se pueden apreciar diferentes figuras geométricas. En la imagen se aprecia un triángulo rectángulo ACB.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_30* para saber más del ***skateboarding*** en nuestro país.

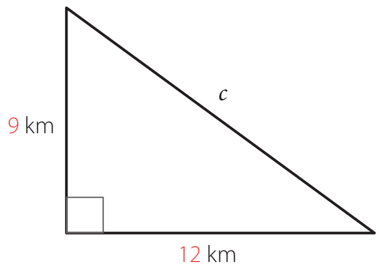
- Para ganar en el *skateboarding*, ¿cuánto tiempo tienen los competidores para mostrar su rutina?, ¿crees que es suficiente?, ¿por qué?
- La palabra *street* significa «calle» en inglés. ¿Por qué crees que hay una categoría llamada *street*?
- ¿Consideras que este deporte promueve un estilo de vida saludable?, ¿en qué lo aprecias?
- En la figura geométrica que se muestra anteriormente, ¿el cateto adyacente a α mide más que el cateto opuesto a β? Explica.
- En el triángulo de la imagen anterior, ¿es correcto afirmar que la medida del lado $\overline{BA}$ es mayor que la medida del lado $\overline{AC}$? Justifica.

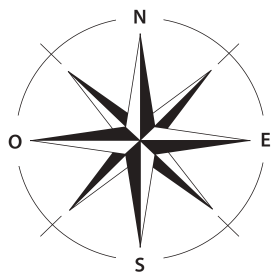
» Ejemplo 1

Ignacio y Catalina realizaron caminatas en un terreno plano. Ambos partieron desde un mismo punto y recorrieron las distancias que se señalan en la imagen. Ignacio se dirigió hacia el norte y Catalina hacia el este. ¿A qué distancia se encuentran los puntos a los que llegaron tras completar sus caminatas?

1. Dibuja un esquema de la situación.

   Se dibuja un triángulo rectángulo en que c representa la distancia solicitada, que corresponde a la medida de la hipotenusa.





2. Aplica el teorema de Pitágoras.

   El teorema de Pitágoras indica que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

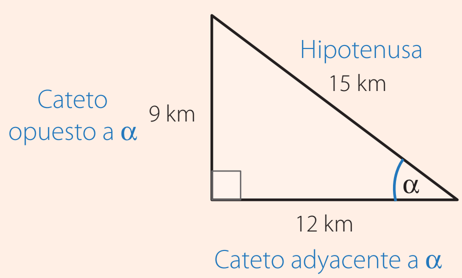
$$c^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Leftrightarrow c = \sqrt{225} \Leftrightarrow c = 15$$

3. Responde.

   Los puntos a los que llegaron Ignacio y Catalina se encuentran a una distancia de 15 km.

» Razones trigonométricas

A partir de un triángulo rectángulo como el de la imagen, las **razones trigonométricas** respecto de un ángulo α corresponden a la comparación entre las longitudes de sus lados por medio de un cociente.



Tres de ellas son las siguientes:

Seno de α $\dfrac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \dfrac{9 \text{ km}}{15 \text{ km}} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

Coseno de α $\dfrac{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \dfrac{12 \text{ km}}{15 \text{ km}} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

Tangente de α $\dfrac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{9 \text{ km}}{12 \text{ km}} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

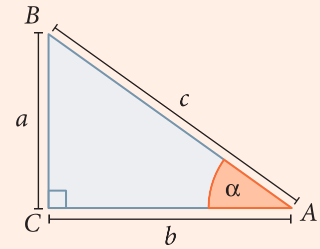
BDA U3_ACT_2

A continuación, estudiaremos las razones trigonométricas fundamentales respecto de un ángulo: seno, coseno y tangente.

Razón trigonométrica: seno de un ángulo

El seno de un ángulo α se simboliza como sen α y se define como el cociente entre la medida del cateto opuesto al ángulo α y la medida de la hipotenusa. En el triángulo ABC de la imagen, se cumple lo siguiente:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

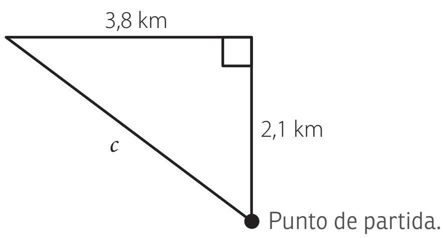


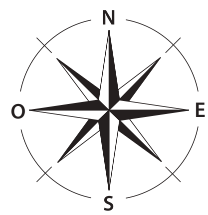
Ejemplo 2

Sara practica canotaje en un gran lago. Si rema 2,1 km en línea recta hacia el norte y luego 3,8 km en línea recta hacia el oeste, ¿qué distancia debe remar para volver a su punto de partida por el camino más corto?

1. Dibuja un esquema de la situación.

   Se dibuja un triángulo rectángulo en que c representa la distancia que quiere calcularse.





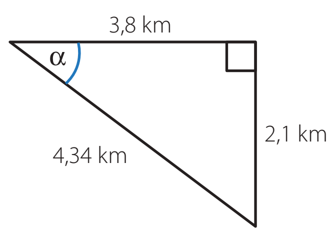
2. Aplica el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = 2{,}1^2 + 3{,}8^2 = 4{,}41 + 14{,}44 = 18{,}85 \Leftrightarrow c = \sqrt{18{,}85}$$

3. Utiliza la calculadora para determinar el valor de $\sqrt{18{,}85}$ y responde.

   Sara debe remar, aproximadamente, $\sqrt{18{,}85}$ km $\approx$ 4,34 km.

Ejemplo 3



En el ejemplo anterior y considerando el ángulo de medida α que se muestra en la imagen, ¿cuál es el valor de sen α?

1. Escribe las medidas de los lados del triángulo rectángulo.

   Medida del cateto opuesto a α: 2,1 km

   Medida del cateto adyacente a α: 3,8 km

   Medida aproximada de la hipotenusa: 4,34 km

2. Aplica la expresión para determinar el seno del ángulo.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} \approx \frac{2{,}1 \text{ km}}{4{,}34 \text{ km}} = \frac{210}{434} = \frac{15}{31} \approx 0{,}4838\ldots$$

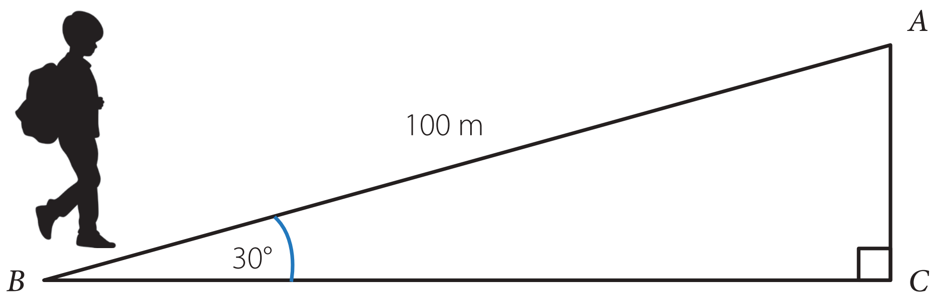
3. Responde.

   El valor aproximado de sen α es 0,48.

- ¿En qué unidades de medida queda expresada la razón trigonométrica?, ¿por qué?

Ejemplo 4

Un niño camina subiendo una colina desde el punto B hasta el punto A, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{BC}$?



1. Identifica las medidas conocidas y la incógnita de la situación.
   - En la imagen se observa que la medida de la hipotenusa del triángulo ABC es 100 m.
   - La medida del ángulo $\sphericalangle CBA$ es 30°.
   - A la medida del segmento $\overline{BC}$ se le asigna la letra x.

2. Escribe la razón trigonométrica que permite calcular x.

$$\cos 30° = \frac{\text{medida del cateto adyacente}}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{x}{100}$$

3. Despeja la incógnita x.

$$\cos 30° = \frac{x}{100}$$

$$100 \cdot \cos 30° = x$$

4. Utiliza una calculadora para determinar el valor de cos 30°.

$$\cos 30° \approx 0{,}866$$

5. Reemplaza este valor y calcula x.

$$100 \cdot 0{,}866 \approx x$$

$$86{,}6 \approx x$$

6. Responde.

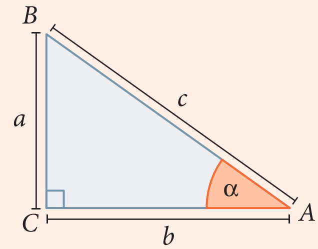
   El segmento $\overline{BC}$ mide 86,6 m, aproximadamente.

- ¿Cómo determinarías la medida del segmento $\overline{CA}$?, ¿qué razón trigonométrica podrías utilizar? Explica a tu curso.
- ¿Cómo puedes comprobar que las medidas calculadas de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ son correctas? Aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC y haz la verificación.

BDA U3_ACT_3

Razón trigonométrica: coseno de un ángulo

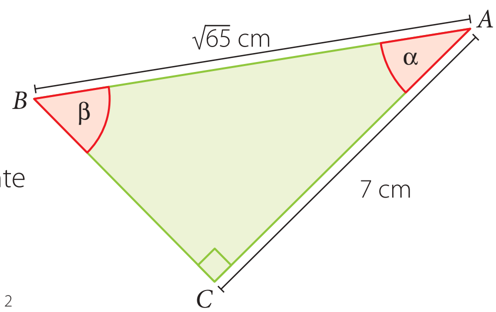
El coseno de un ángulo α se simboliza como cos α y se define como el cociente entre la medida del cateto adyacente al ángulo α y la medida de la hipotenusa. En el triángulo ABC de la imagen se cumple lo siguiente:



$$\cos\alpha = \frac{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Ejemplo 5

En el triángulo rectángulo ABC que se muestra en la imagen, las razones trigonométricas sen β y cos β, ¿son las mismas?



1. Calcula la medida del cateto que falta.

   La medida desconocida corresponde a la del cateto adyacente al ángulo β ($\overline{BC}$). Para determinarla, se utilizará el teorema de Pitágoras.

$$(BC)^2 + (CA)^2 = (AB)^2$$
$$(BC)^2 + 7^2 = (\sqrt{65})^2$$
$$(BC)^2 + 49 = 65$$
$$(BC)^2 = 16$$
$$BC = 4$$

2. Escribe las medidas de los catetos opuesto y adyacente al ángulo α, y el de la hipotenusa.
   - La medida del cateto opuesto a β es 7 cm.
   - La medida del cateto adyacente a β es 4 cm.
   - La medida de la hipotenusa es $\sqrt{65}$ cm.
3. Expresa las razones trigonométricas.

$$\text{sen }\beta = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \beta}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{medida del cateto adyacente a } \beta}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

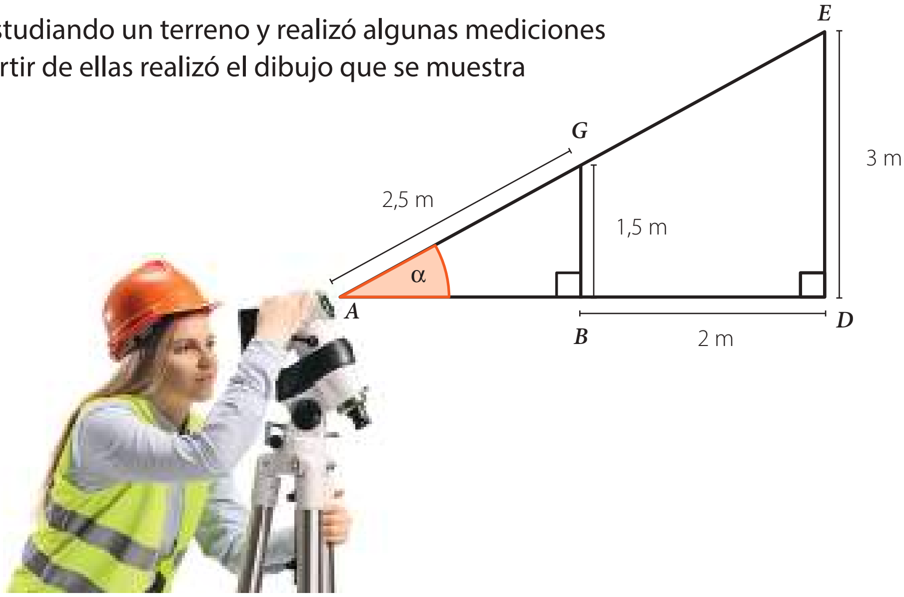
4. Responde.

   Las razones trigonométricas son diferentes, ya que sen $\beta = \frac{7\sqrt{65}}{65}$ y cos $\beta = \frac{4\sqrt{65}}{65}$.

- En el paso 3 del ejemplo anterior, ¿por qué $\frac{7}{\sqrt{65}}$ es igual a $\frac{7\sqrt{65}}{65}$?, ¿qué procedimiento se realizó para conservar la igualdad?
- En el triángulo ABC del **Ejemplo 5**, ¿es correcto afirmar que sen β = cos α? Analicen la figura y compartan su respuesta con el curso.

Ejemplo 6

Una agrimensora está estudiando un terreno y realizó algunas mediciones con un taquímetro. A partir de ellas realizó el dibujo que se muestra en la imagen.



La razón trigonométrica cos α, ¿es la misma en los triángulos semejantes ADE y ABG?

1. Calcula la medida del cateto adyacente a α en el triángulo ABG.

   Se puede utilizar el teorema de Pitágoras, en el triángulo ABG para calcular la medida del cateto $\overline{AB}$.

$$(AB)^2 + (1{,}5)^2 = (2{,}5)^2$$
$$(AB)^2 + 2{,}25 = 6{,}25$$
$$(AB)^2 = 6{,}25 - 2{,}25$$
$$(AB)^2 = 4$$
$$AB = 2$$

2. Determina la medida de la hipotenusa $\overline{EA}$ del triángulo ADE.

   Los triángulos ADE y ABG son semejantes, ya que tienen en común los mismos ángulos. Utilizando la semejanza de los dos triángulos, es posible calcular la medida de la hipotenusa $\overline{EA}$.

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GB} \rightarrow \frac{AE}{3} = \frac{2{,}5}{1{,}5} \rightarrow AE = 2{,}5 \cdot \frac{3}{1{,}5} = 5$$

3. Calcula cos α en cada triángulo.

   Triángulo ADE $\quad \cos\alpha = \dfrac{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

   Triángulo ABG $\quad \cos\alpha = \dfrac{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \dfrac{2}{2{,}5} = 0{,}8$

4. Responde.

   La razón trigonométrica cos α es la misma en los triángulos ADE y ABG.

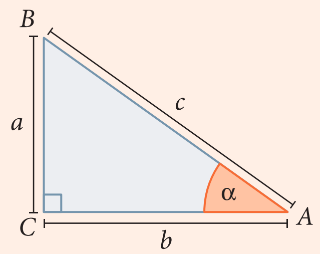
- ¿Qué dudas te surgieron al momento de leer el ejemplo propuesto? Coméntalas con el curso.

BDA U3_ACT_4

Razón trigonométrica: tangente de un ángulo

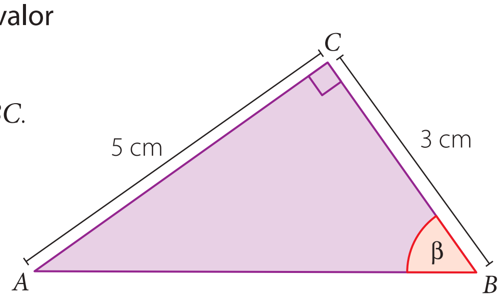
La tangente de un ángulo se simboliza como tan α y se define como el cociente entre la medida del cateto opuesto al ángulo α y la medida del cateto adyacente al ángulo α. En el triángulo ABC de la imagen se cumple lo siguiente:

$$\tan \alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$



Ejemplo 7

Respecto del triángulo ABC, ¿es correcto afirmar que el valor de tan β es menor que el de sen β y que el de cos β?



1. Calcula la medida de la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo ABC.

$$5^2 + 3^2 = (AB)^2$$
$$25 + 9 = (AB)^2$$
$$34 = (AB)^2$$
$$\sqrt{34} = AB$$

2. Escribe las medidas de los catetos opuesto y adyacente al ángulo β, y el de la hipotenusa.
   - La medida del cateto opuesto a β es 5 cm.
   - La medida del cateto adyacente a β es 3 cm.
   - La medida de la hipotenusa es $\sqrt{34}$ cm.

3. Expresa las razones trigonométricas.

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \beta}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \approx 0{,}857$$

$$\cos \beta = \frac{\text{medida del cateto adyacente a } \beta}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \approx 0{,}514$$

$$\tan \beta = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \beta}{\text{medida del cateto adyacente a } \beta} = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$$

   De acuerdo con los valores anteriores, se cumple que, tan β > sen β y tan β > cos β.

4. Responde.

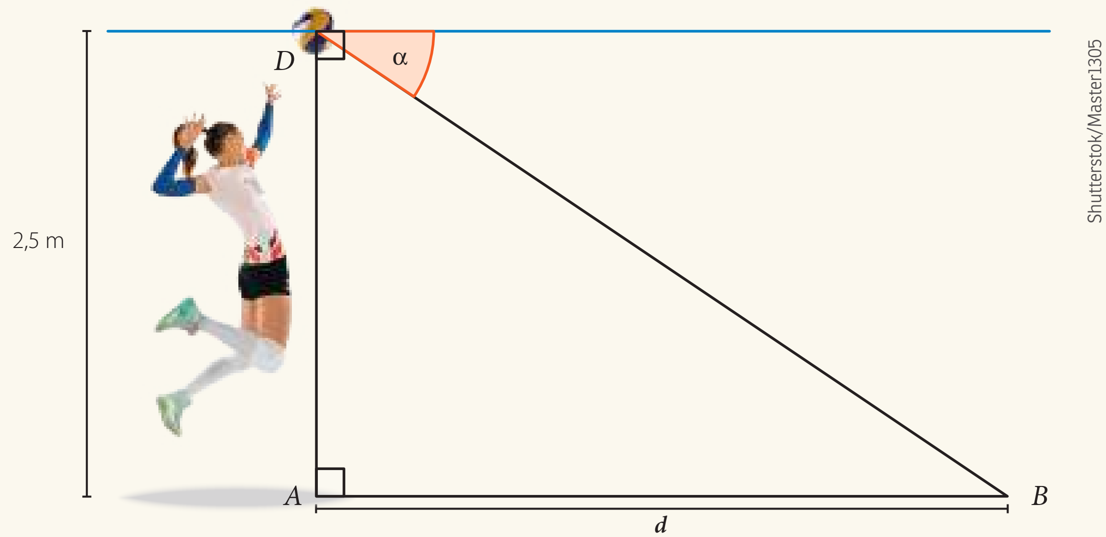
   No es correcta la afirmación, ya que tan β > sen β y tan β > cos β.

- ¿Cómo puedes comprobar los resultados $\frac{5\sqrt{34}}{34} \approx 0{,}857$ y $\frac{3\sqrt{34}}{34} \approx 0{,}514$? Utiliza el botón $\sqrt{\ }$ * de una calculadora manual y responde.

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología del botón que se muestra.

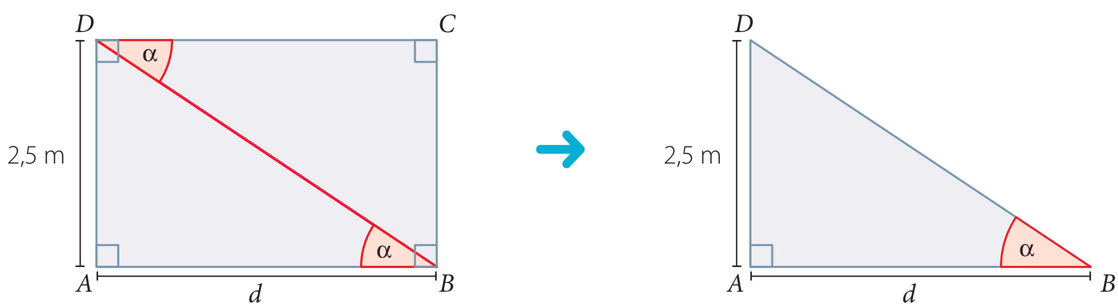
Ejemplo 8 » Conecta con **Educación Física y Salud**.

Como has visto en **Educación Física y Salud**, es importante perfeccionar y aplicar con precisión las habilidades motrices en algún deporte u otra actividad corporal. En este sentido, para mejorar su técnica de lanzamiento, una estudiante revisa videos y fotos de diferentes jugadoras profesionales de vóleibol. Con la finalidad de mejorar la distancia de tiro, logra capturar el momento que se muestra en la imagen.



¿Qué expresión modela la distancia d a la que llega el balón al ser golpeado por la jugadora?

1. Representa la información.



2. Expresa una razón trigonométrica respecto de α que incluya a la variable d.

Medida del cateto opuesto a α: 2,5 m | Medida del cateto adyacente a α: d

Ya que se conoce la medida del cateto opuesto a α y la medida de su cateto adyacente es d se utilizará la razón trigonométrica tangente.

$$\tan \alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha} = \frac{2{,}5 \text{ m}}{d} \rightarrow d = \frac{2{,}5 \text{ m}}{\tan \alpha}$$

3. Responde.

La expresión que modela la distancia d a la que llega el balón es $d = \dfrac{2{,}5 \text{ m}}{\tan \alpha}$.

- El largo de una cancha de vóleibol mide 18 m. Si se aplica un ángulo de saque $\alpha = 10°$, ¿es posible hacer chocar la pelota con el suelo antes de que haya recorrido los 18 m? No consideres la presencia de la red y comenta la respuesta con tu curso.

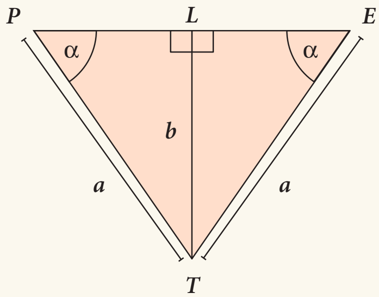
BDA U3_ACT_5 a 8

Valores de las razones trigonométricas

El deportista chileno Aldair Castro representó a Chile en los Juegos Panamericanos Santiago 2023 en la especialidad de halterofilia.

El levantamiento de pesas o halterofilia exige un nivel técnico, físico y mental superlativo, ya que para levantar más del doble del peso corporal desde el suelo hasta pasarlo por encima de la cabeza no basta solo con utilizar todos los músculos del cuerpo sino que también se requiere de gran concentración y técnica para evitar lesiones, ya que la carga sobre la espalda es muy grande.

Fuente: Juegos Panamericanos y Parapanamericanos. ***Levantamiento de pesas***. Ministerio del Deporte de Chile. Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_32*.



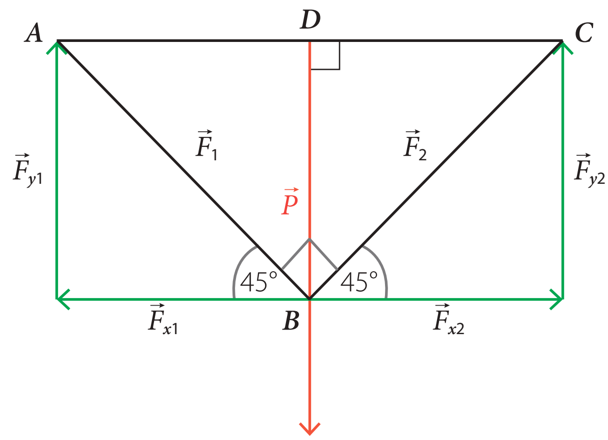
Representación del triángulo TEP que forma el deportista de acuerdo con la foto.

- ¿Qué entendías por halterofilia antes de leer esta página? Coméntalo con tu curso.
- ¿Consideras que el deporte favorece el desarrollo físico, promoviendo hábitos de vida saludable?, ¿por qué?
- Respecto del triángulo TEP de la imagen inicial, ¿es correcto afirmar que corresponde a un triángulo equilátero?, ¿por qué? ¿En qué te basas para responder lo anterior? Explica.
- ¿Cómo calcularían el valor de sen α en el triángulo TEL de la imagen inicial? Usen su creatividad y expliquen su estrategia al curso.

» Ejemplo 1

En la imagen se muestra a una levantadora de pesas participando en los Juegos Olímpicos de Beijing 2008. La barra de la pesa y los brazos elongados de la deportista forman el triángulo rectángulo ABC que se muestran en el dibujo. En él se han representado las fuerzas que actúan en la situación.

Shutterstock/photoyh



Si el peso total que está levantando equivale a 900 newtons (N), ¿cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce con cada uno de sus brazos?

1. Identifica las fuerzas existentes en la situación.

$\vec{P}$: peso total de la haltera o pesa. Su magnitud es de 900 N.

$\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$: fuerzas que ejerce con sus brazos la deportista. Se cumple que sus magnitudes son iguales.

$\vec{F}_{x1}$ y $\vec{F}_{y1}$: componentes horizontal y vertical de la fuerza $\vec{F}_1$.

$\vec{F}_{x2}$ y $\vec{F}_{y2}$: componentes horizontal y vertical de la fuerza $\vec{F}_2$.

2. Establece relaciones entre las fuerzas anteriores.

Para que el sistema esté en equilibrio, las fuerzas resultantes horizontal y vertical deben ser nulas.

Dirección horizontal

$$\cos 45° = \frac{F_{x1}}{F_1} \Leftrightarrow F_{x1} = F_1 \cdot \cos 45°$$

$$\cos 45° = \frac{F_{x2}}{F_2} \Leftrightarrow F_{x2} = F_2 \cdot \cos 45°$$

Como la fuerza resultante horizontal debe ser nula, se cumple lo siguiente:

$$F_{x1} = F_{x2} \Leftrightarrow F_1 = F_2$$

Dirección vertical

$$\text{sen } 45° = \frac{F_{y1}}{F_1} \Leftrightarrow F_{y1} = F_1 \cdot \text{sen } 45°$$

$$\text{sen } 45° = \frac{F_{y2}}{F_2} \Leftrightarrow F_{y2} = F_2 \cdot \text{sen } 45°$$

Como la fuerza resultante vertical debe ser nula, se cumple lo siguiente:

$$\boxed{F_{y1} + F_{y2} = P}$$

3. Realiza la sustitución $F = F_1 = F_2$ y reemplaza los valores de F_{y1} y F_{y2} en la ecuación destacada con amarillo.

$$F \cdot \text{sen } 45° + F \cdot \text{sen } 45° = 900 \rightarrow 2 \cdot F \cdot \text{sen } 45° = 900 \rightarrow F = \frac{900}{2 \cdot \text{sen } 45°} \approx \frac{900}{2 \cdot 0{,}707} = \frac{900}{1{,}414} = 636{,}492...$$

4. Responde.

La magnitud aproximada de la fuerza que ejerce con cada brazo es de 636,5 N.

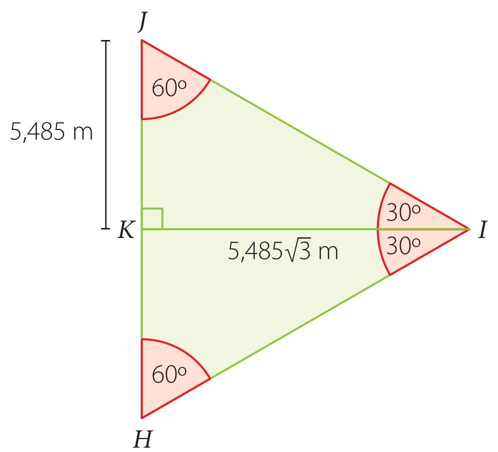
Valores de las razones trigonométricas para ángulos de 30° y 60°

Ángulo 30º →	$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Ángulo 60º →	$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$

Ejemplo 2

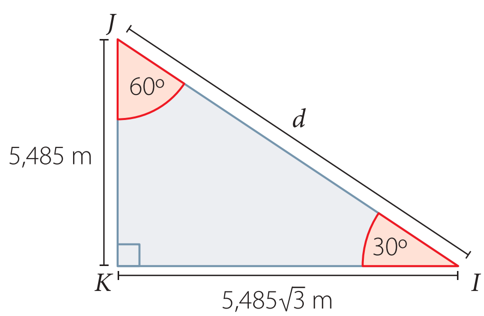
Las máquinas de lanzamiento, también conocidas como lanzadores automáticos, son dispositivos diseñados para lanzar pelotas con precisión en cuanto a velocidad y ángulo. Se emplean en variados deportes tales como el tenis, el sóftbol, el bádminton y el fútbol, entre otros.

Supón que se posiciona una máquina en el punto I de la siguiente imagen para enviar pelotas de tenis a los puntos H y J.



La distancia que recorre una pelota en línea recta desde el punto I al punto J, ¿corresponde a $\frac{5{,}485}{\cos 60°}$ m?

1. Representa los datos en un triángulo rectángulo y aplica una razón trigonométrica para determinar la medida d de la hipotenusa.



$\cos 60° = \frac{5{,}485}{d} \rightarrow d = \frac{5{,}485}{\cos 60°}$

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, se tiene lo siguiente:

$$d = \frac{5{,}485}{\frac{1}{2}} = 5{,}485 \cdot 2 = 10{,}97$$

2. Responde.

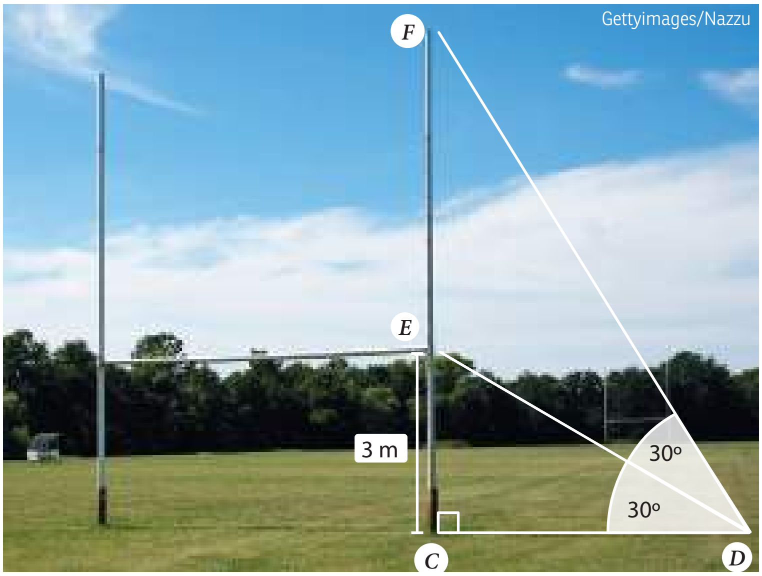
   La distancia que recorre una pelota desde I a J es 10,97 m.

- ¿De qué otra forma hubieras resuelto el ejemplo anterior? Coméntalo con tu curso.

EJEMPLO 3

En el rugby, el término «arco» se refiere comúnmente a los postes de gol, que son dos postes verticales colocados en el campo de juego unidos por un travesaño horizontal en la parte superior, formando una «H». Estos postes de gol son fundamentales en el juego, ya que determinan si un equipo ha marcado puntos. Observa el arco de rugby que se muestra en la imagen.

Postes de la portería en el línea de in-goal, de una cancha de Rugby. ➔



¿Cual es la longitud del poste vertical $\overline{CF}$?

1. Representa la información en un triángulo y calcula la distancia a desde D hasta C.

   En el triángulo rectángulo DEC se cumple lo siguiente:

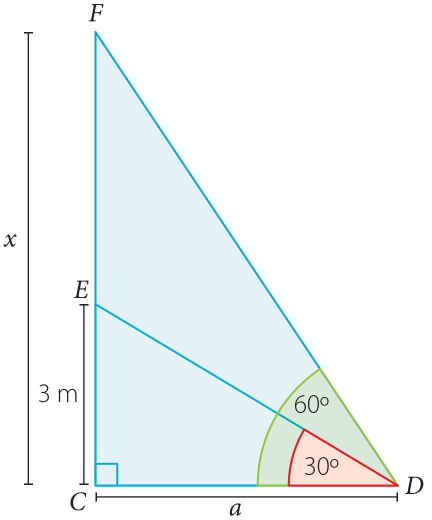
$$\tan 30° = \frac{3}{a}$$

$$a \cdot \tan 30° = 3$$

$$a = \frac{3}{\tan 30°}$$

$$a = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$a = 3\sqrt{3}$$



2. Calcula longitud x del poste vertical.

   En el triángulo DFC se cumple lo siguiente:

$$\tan 60° = \frac{x}{3\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{3\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = x$$

$$9 = x$$

3. Responde.

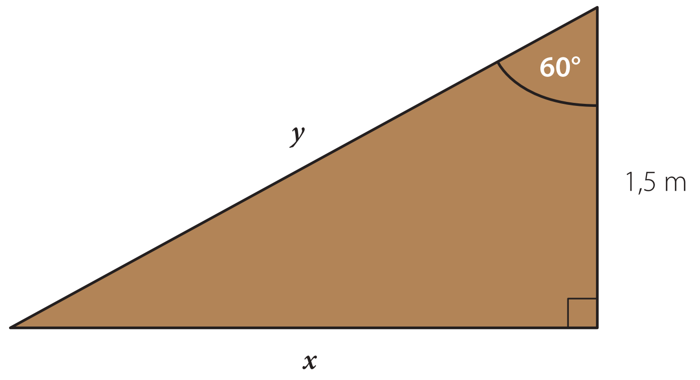
   La longitud del poste vertical $\overline{CF}$ es 9 m.

- Utilizando razones trigonométricas, ¿cómo calcularías la medida del lado $\overline{DE}$ en el ejemplo anterior? Explica.

BDA U3_ACT_9 y 10

EJEMPLO 4

Valentina va a construir un mueble tipo baúl para guardar ropa y zapatos. Su forma será la de un prisma de base triangular. A continuación, se muestra una vista lateral del mueble:



¿Cuáles son las medidas, en metros, de x e y que tendrá el mueble?

1. Expresa el valor de x aplicando la definición de una razón trigonométrica.

   Como se conoce la medida del cateto adyacente al ángulo de 60° y se quiere determinar la medida de su cateto opuesto, se utiliza la razón tangente.

$$\tan 60° = \frac{x}{1{,}5} \Leftrightarrow x = 1{,}5 \cdot \tan 60°$$

2. Reemplaza el valor de la tangente de un ángulo de 60° en la expresión anterior.

   Como $\tan 60° = \sqrt{3}$, se tiene lo siguiente:

$$x = 1{,}5 \cdot \tan 60° = 1{,}5 \cdot \sqrt{3}$$

3. Expresa el valor de y aplicando la definición de una razón trigonométrica.

   Como se conocen las medidas de los catetos adyacente y opuesto al ángulo de 60° y se quiere determinar la medida de la hipotenusa del triángulo, se pueden utilizar las razones coseno o seno.

$$\cos 60° = \frac{1{,}5}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1{,}5}{\cos 60°}$$

4. Reemplaza el valor del coseno de un ángulo de 60° en la expresión anterior.

   Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, se tiene lo siguiente:

$$y = \frac{1{,}5}{\frac{1}{2}} = 1{,}5 \cdot 2 = 3$$

5. Responde.

   El valor de x es $1{,}5\sqrt{3}$ m y el de y es 3 m.

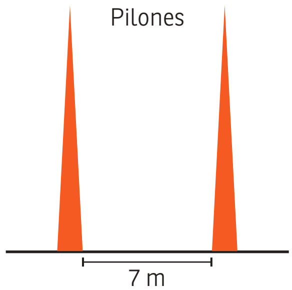
- ¿Cuál es el valor decimal de $1{,}5\sqrt{3}$? Utiliza una calculadora para responder.
- ¿Cómo puedes comprobar que el valor obtenido para y es correcto? Vuelve a calcularlo de dos formas distintas: utilizando la razón trigonométrica seno y aplicando el teorema de Pitágoras.

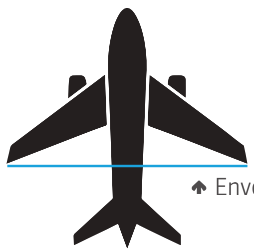
Valores de las razones trigonométricas para un ángulo de 45°

Ángulo 45° →	$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$

Ejemplo 5

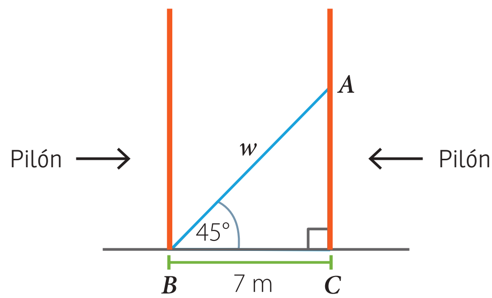
Como parte de algunas carreras aéreas, los pilotos deben demostrar su destreza para pasar su avión entre dos torres inflables o pilones. Como el espacio entre los dos pilones es menor que la envergadura del avión, el aparato debe pasar torcido en un ángulo.
Considerando la separación entre los pilones que se muestran en la imagen, ¿cuál es la envergadura aproximada del avión si el ángulo mínimo que debe formar con la horizontal mide 45°?





Envergadura w del avión.

1. Representa la situación mediante un dibujo.



2. Expresa el valor de w aplicando la definición de una razón trigonométrica.

   En el triángulo rectángulo ABC se conoce la medida del cateto adyacente al ángulo de 45° (7 m) y se quiere determinar la medida w de la hipotenusa. Por lo tanto, se utiliza la razón coseno.

$$\cos 45° = \frac{7}{w} \Leftrightarrow w = \frac{7}{\cos 45°}$$

3. Reemplaza el valor del coseno de un ángulo de 45° en la expresión anterior.

   Como $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene lo siguiente:

$$w = \frac{7}{\cos 45°} = \frac{7}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

4. Responde.

   La envergadura aproximada del avión es $7\sqrt{2}$ m.

- ¿Cuál es el valor de $7\sqrt{2}$? Utiliza una calculadora para responder.

BDA U3_ACT_11

Ejemplo 6

Utilizando un *software* matemático *online*, puedes representar diferentes triángulos para comprender de mejor forma las razones trigonométricas. ¿Cómo puedes construir un triángulo rectángulo con ángulos agudos de 30° y 60°?

1. Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_35*, y confecciona un arco de circunferencia, con y luego (arco de circunferencia).

   Para ello marca los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0,1)$. Si es necesario, modifica la graduación de los ejes para obtener la **Captura 1**.

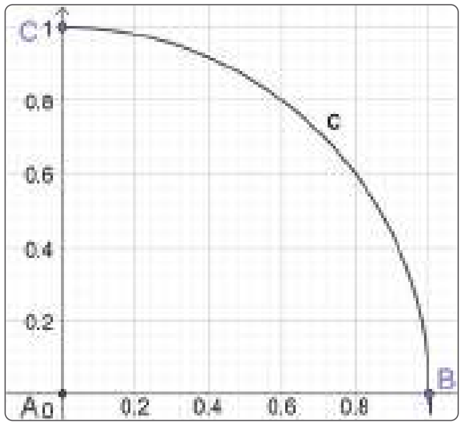
2. Confecciona un deslizador haciendo clic en a=2 con los siguientes datos:

   Datos para el deslizador

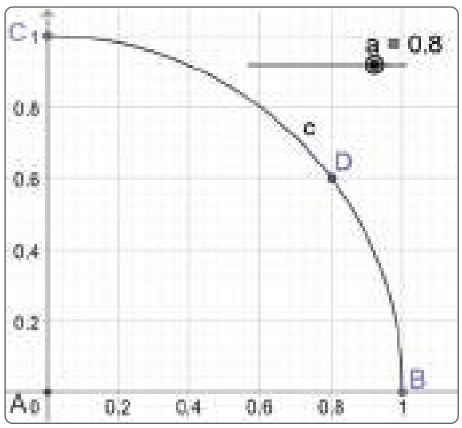
   Luego, con confecciona un punto $D(a, \sqrt{1 - a^2})$. De esta manera quedará el punto sobre el arco y con el deslizador podrás mover el punto como se muestra en la **Captura 2**.

3. Con confecciona un punto $E(a, 0)$. Luego, con , confecciona un triángulo de vértices A, E y D. Para que aparezcan los valores de cada cateto e hipotenusa debes hacer clic con el botón secundario del mouse sobre cada lado y activar la opción **Valor**. Finalmente, en marcas los ángulos del triángulo en sentido antihorario. Puedes observar el resultado de tu trabajo en la **Captura 3**.

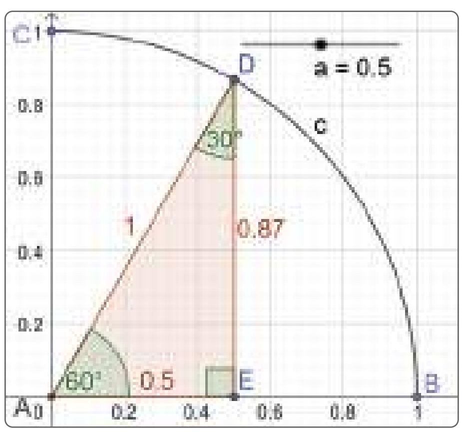
Captura 1



Captura 2



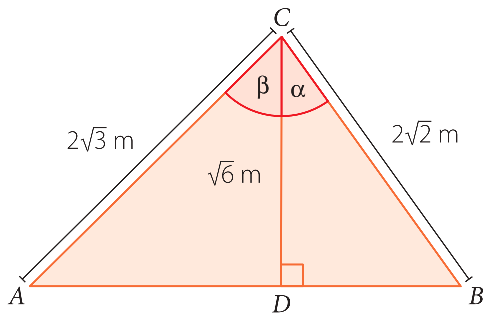
Captura 3



- En el ejemplo anterior, ¿cómo calcularías sen 30°, cos 30° y tan 30°? Explica a tu curso.
- ¿Son exactos los valores calculados en la pregunta anterior?, ¿por qué?

Ejemplo 7

En el triángulo ABC de la imagen, ¿cuál es la medida del ángulo ACB?



1. Calcula la medida del ángulo DCB.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se tiene que $\alpha = 30°$.

2. Calcula la medida del ángulo ACD.

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{6}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene que $\beta = 45°$.

3. Responde.

La medida del ángulo ACB corresponde a $\alpha + \beta$, es decir, $30° + 45° = 75°$.

- ¿Qué razón trigonométrica utilizarías para calcular la medida del ángulo CBD?, ¿y para calcular la medida del ángulo DAC?

Las calculadoras científicas tienen la opción de calcular los valores de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente presionando el botón correspondiente que se muestra en la imagen y, a continuación, el ángulo. *

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

- ¿Cuál es el valor de sen 30°, tan 60° y cos 45°? Utilicen una calculadora científica, comparen sus resultados con los obtenidos en los ejemplos anteriores y compartan su respuesta con otros grupos.

Para finalizar la **Lección 1**...

- ¿Expusiste tus ideas de manera coherente y fundamentada durante el trabajo grupal de la lección?, ¿por qué?
- ¿Qué dificultades tuviste para calcular las razones trigonométricas con la calculadora?
- ¿Fueron útiles las representaciones de la lección para comprender el contenido estudiado?, ¿por qué?
- ¿En qué otras situaciones aplicarías lo aprendido?
- ¿Tuviste interés en resolver los desafíos propuestos en la lección?, ¿por qué?
- ¿Cómo puede la práctica de deportes aportar a tu desarrollo físico y personal?

BDA U3_ACT_12 a 15

Lección 2 Aplicaciones de las razones trigonométricas

Ángulos de elevación y depresión

El Parque Nacional Torres del Paine está ubicado en la Región de Magallanes y Antártica Chilena, comuna de Torres del Paine, provincia de Última Esperanza. Es conocido mundialmente por los macizos que le dan su nombre, gigantes de granito modelados por la fuerza del hielo glacial.

Trekking, Parque Nacional Torres del Paine, Región de Magallanes y Antártica Chilena.

El trekking, también llamado excursionismo, no es cualquier tipo de caminata en la naturaleza, sino que se trata de excursiones que pueden durar más de un día. Para realizarlo es necesario contar con el equipo adecuado, que variará según la duración del recorrido, clima y exigencia.

Ingresa a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_36* para saber más del trekking, montañismo y senderismo.

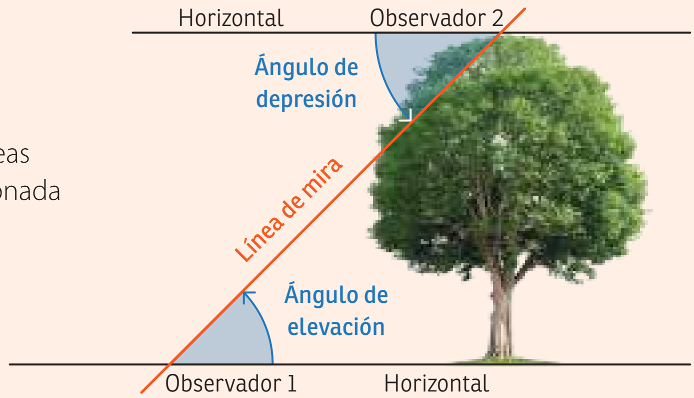
En el parque habitan especies como el ñandú, el blanquillo, la lechuza, el puma, el chingue y el zorro colorado, además de distintas clases de reptiles, anfibios y peces. En 1978 el parque fue declarado Reserva de la Biósfera por el Programa Hombre y Biósfera (MAB) de la UNESCO.

Fuente: Corporación Nacional Forestal (CONAF). (s.f.). *Parque Nacional Torres del Paine.* Ministerio de Agricultura de Chile. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_37*

- ¿Por qué crees que las Torres del Paine son conocidas mundialmente? Explica.
- ¿Consideras necesario proteger el entorno natural y sus recursos?, ¿por qué?
- ¿Qué información consideras importante al momento de realizar trekking? Coméntala con tu curso.

Ángulos de elevación y depresión

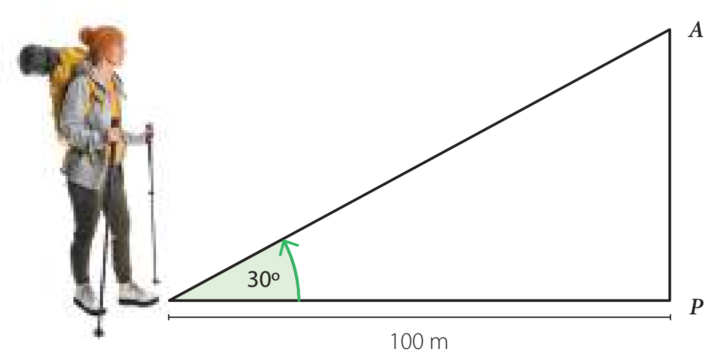
Los **ángulos de elevación** y **depresión** se forman por la intersección de dos líneas imaginarias, una horizontal y otra relacionada con la línea de mira de un observador.



EJEMPLO 1 **Educación ambiental.**

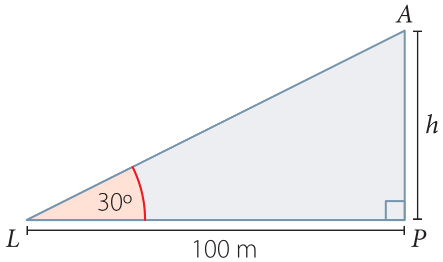
Mediante la propuesta de trabajo de la Reserva de Biosfera Torres del Paine, se promoverán actividades deportivas y el consumo de productos saludables entre la comunidad. Este tipo de acciones garantiza una vida sana y promueve el bienestar para todos, lo cual está en concordancia con el **ODS 3** Salud y bienestar.

Una de las formas que contribuyen a llevar una vida saludable es realizar trekking.



Una persona recorrerá el plano inclinado que se muestra en la imagen anterior. Ella estimó la medida del ángulo de elevación que allí se muestra y midió la distancia horizontal del plano mediante un podómetro. ¿A qué altura se encontrará la persona cuando esté en el punto A?

1. Representa en un triángulo la información.



Medida del ángulo de elevación: 30°

Medida del cateto adyacente al ángulo de elevación: 100 m

Medida del cateto opuesto al ángulo de elevación: h

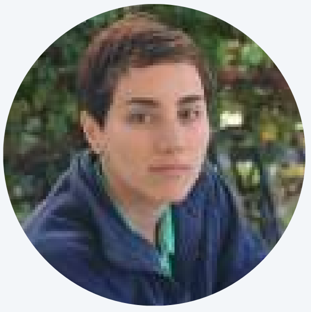
2. Utiliza la razón trigonométrica tangente para calcular la distancia h y responde.

$$\text{Como } \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{, se tiene que: } \tan 30° = \frac{h}{100} \leftrightarrow 100 \cdot \tan 30° = h \leftrightarrow \frac{100\sqrt{3}}{3} = h$$

Por lo tanto, la persona se encontrará a una altura aproximada de $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m.

- Si consideras una aproximación de $\sqrt{3}$ igual a 1,73 en el ejemplo anterior, ¿es correcto afirmar que la distancia entre los puntos es mayor que 55 m? Comparte tu respuesta con el curso.

BDA U3_ACT_16



Wikimediacommons

Maryam Mirzakhani
(1977-2017)

BDA U3_AUD_1

En 2014 se convirtió en la primera mujer galardonada con la Medalla Fields otorgada por la ICM en Seúl, reconocimiento considerado como el premio Nobel de las matemáticas.

Ella piensa las matemáticas con imágenes y enfoca los problemas difíciles bosquejando en grandes hojas de papel:

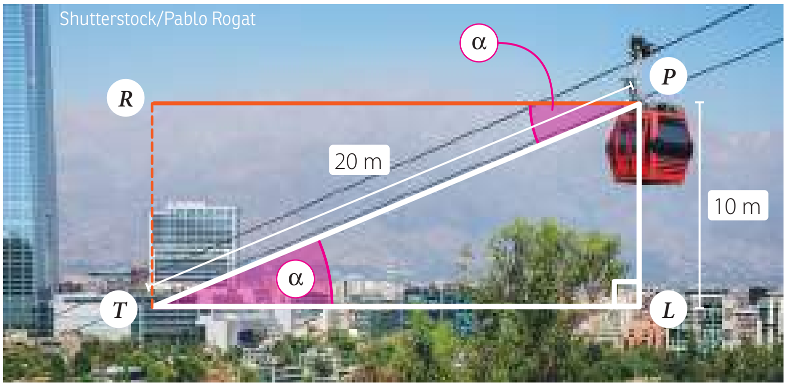
«Cuando una piensa en un problema matemático difícil y no quiere anotar todos los detalles, bosquejar ayuda a mantenerse conectada al problema».

Fuente: Matemáticas, el papel de la mujer.
Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_38*.

- ¿Qué opinas de la reflexión hecha por Maryam Mirzakhani? Comenta con el curso.

Ejemplo 2

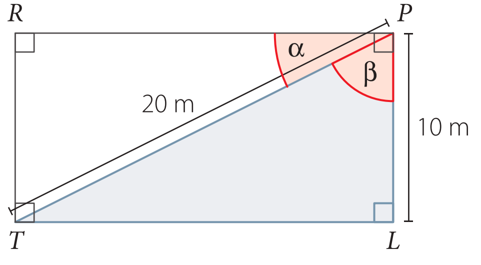
Luego de ejercitarse trotando en un cerro, Emilio decidió dar un paseo en teleférico. Una amiga le toma una foto cuando se encontraba dentro de una de las cabinas. Tras estimar algunas longitudes a partir de la rapidez con que se mueve la cabina y la altura a la que se encuentra el cableado, Emilio las escribió sobre la foto, como puede verse en la imagen.



¿Cuál es la medida α del ángulo de depresión?

1. Realiza un bosquejo de la información.

   Se dibuja un rectángulo $TLPR$ y al trazar su diagonal, se forman 2 triángulos rectángulos en que se cumple que $\alpha + \beta = 90°$.



Medida del cateto adyacente a β: 10 m

Medida de la hipotenusa: 20 m

2. Calcula el valor de β.

$$\cos \beta = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

   Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, se tiene que $\beta = 60°$. Entonces, dado que $\alpha + \beta = 90°$, se cumple que $\alpha = 30°$.

3. Responde.

   La medida del ángulo de depresión es 30°.

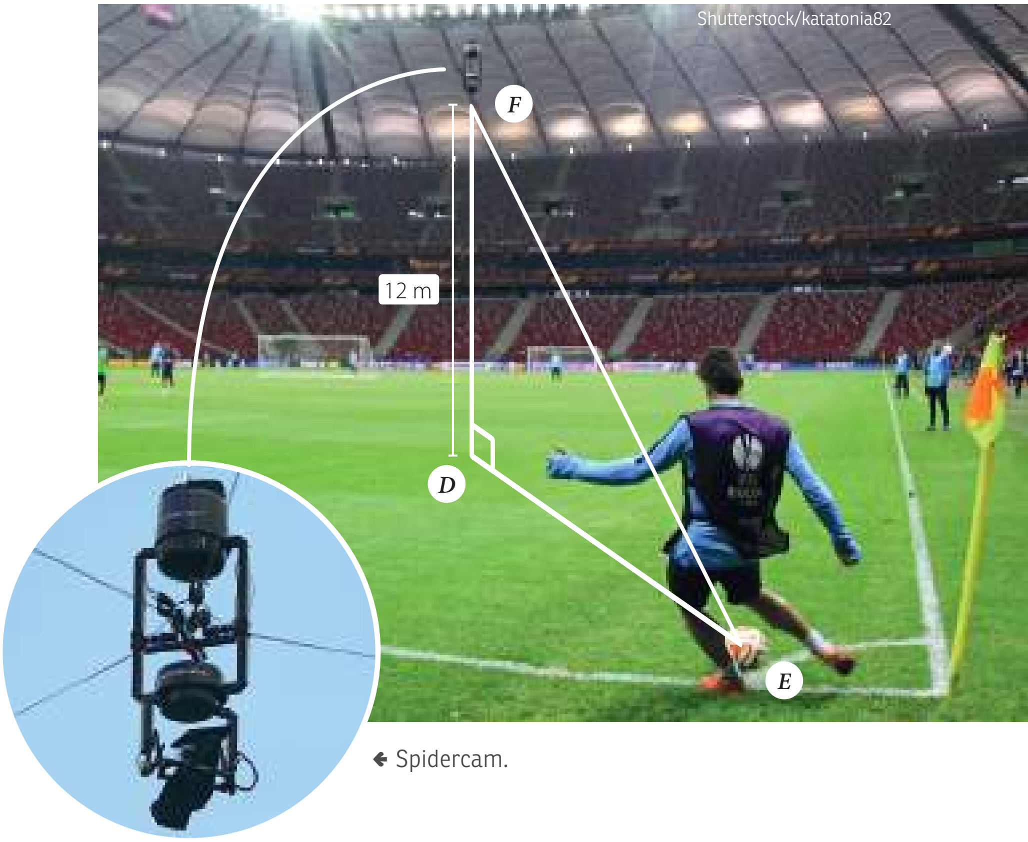
- ¿De qué otra forma resolverías el ejemplo anterior? Explica.

Ejemplo 3

El Spidercam es un sistema de alambres utilizado para cámaras de televisión. Consiste en cuatro cables motorizados que permiten movimientos fluidos en el aire, ofreciendo perspectivas únicas. Normalmente opera a una altura máxima de 10 m, pero puede elevarse más si es necesario.

El operador de la Spidercam puede ajustar el ángulo de depresión de las cámaras para obtener la vista deseada.

Considera que en el instante del entrenamiento futbolístico que se muestra en la imagen, la Spidercam se encuentra grabando a un futbolista y que el ángulo de depresión desde la cámara hasta el jugador mide 71°.



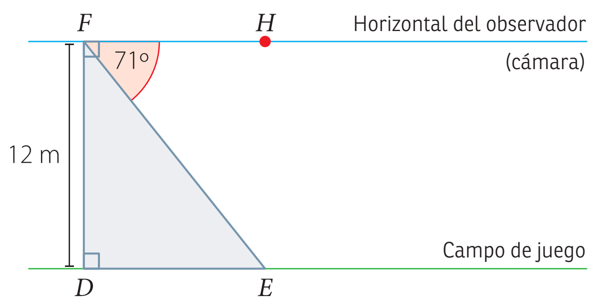
Spidercam.

¿A qué distancia se encuentra la cámara del jugador en ese instante?

1. Realiza un bosquejo de la situación.

   Se observa en el dibujo que la medida del ángulo DFE es $90 - 71° = 19°$.

   La distancia que se quiere determinar corresponde a la medida del segmento $\overline{EF}$.



2. Calcula la distancia solicitada utilizando una calculadora *online* de trigonometría.

   La distancia solicitada corresponde a la medida d de la hipotenusa del triángulo DEF. En el dibujo se cumple lo siguiente:

   $$\cos 19° = \frac{12}{d} \quad \rightarrow \quad d = \frac{12}{\cos 19°}$$

   Con la calculadora se obtiene que $d = 12{,}69144...$

3. Responde.

   La cámara se encuentra aproximadamente a 12,69 m del jugador.

Calculadora *online* de trigonometría
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_39.

- En el ejemplo anterior, si realizas la aproximación $\cos 19° \approx 0{,}95$, ¿qué valor de d obtendrías con una calculadora? En consecuencia, ¿crees que es una buena aproximación? Justifica.

BDA U3_ACT_17 a 20

Descomposición vectorial

En todo deporte, la estrategia, la planificación y la parte táctica cumplen un rol importante en el éxito y buena ejecución de la disciplina. El vóleibol es un deporte que fue ideado en 1895 por William G. Morgan, tomando elementos de otros deportes con el objetivo de disponer de una actividad física con características singulares.

En 1912 se introducen las rotaciones, haciendo que todos los jugadores se ejerciten en los distintos aspectos del juego. Las rotaciones introducen una gran variabilidad sobre el posicionamiento de los jugadores de ambos equipos en la pista y complica el planteamiento de estrategias de juego.

Fuente: Quintana, J. (10 de mayo de 2010). *Principales técnicas de vóleibol*. Federación de Vóleibol de Chile. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_40*

Posiciones de los jugadores durante un partido de vóleibol.

- ¿Por qué crees que en el deporte, la estrategia, la planificación y la parte táctica cumplen un rol importante en el éxito y buena ejecución de la disciplina? Coméntalo con tu curso.
- ¿Qué reglas del vóleibol conoces?
- ¿Consideras importante el compañerismo para la práctica de deportes grupales?, ¿consideras que esto ayuda a construir relaciones basadas en la confianza?, ¿por qué?
- ¿Qué crees que representan las letras A, B y C escritas sobre la imagen del partido de vóleibol?
- La flecha que va de A a C, ¿con qué concepto matemático puedes relacionarla?

Adición y sustracción de vectores

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son puntos en el plano cartesiano, el vector $\overrightarrow{AB}$ está asociado al vector posición $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \overrightarrow{AB}$.

Considerando los vectores posición $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, se define lo siguiente:

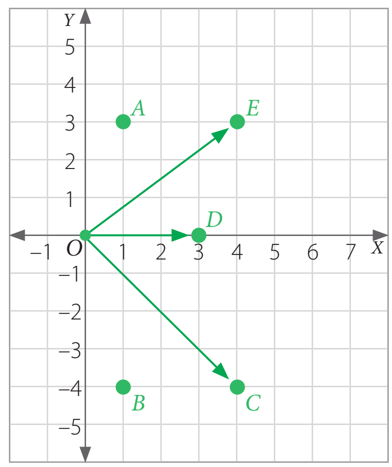
- Adición de vectores → $\vec{u} + \vec{v} = (u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- Sustracción de vectores → $\vec{u} - \vec{v} = (u_x, u_y) - (v_x, v_y) = (u_x - v_x, u_y - v_y)$

Ejemplo 1

Un entrenador de voleibol quiere plantear en su pizarra una estrategia antes de enfrentar a un equipo. Para ello anota en su pizarra lo que se muestra en la imagen y , a continuación, lo representa en el plano cartesiano.

¿Es correcto afirmar que $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$?

Shutterstock/StefanIvanovicME(editado)



1. Identifica las coordenadas de los puntos O, E, C y D.

   $O(0, 0)$ | $E(4, 3)$ | $C(4, -4)$ | $D(3, 0)$

2. Escribe los vectores posición.

   $\overrightarrow{OE} = (4 - 0, 3 - 0) = (4, 3)$ | $\overrightarrow{OC} = (4 - 0, -4 - 0) = (4, -4)$ | $\overrightarrow{OD} = (3 - 0, 0 - 0) = (3, 0)$

3. Calcula la adición de los vectores $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OC}$.

   $$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = (4, 3) + (4, -4) = (4 + 4, 3 + (-4)) = (8, -1)$$

4. Responde.

   No es correcta la afirmación, ya que $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = (8, -1)$ que es distinto de $\overrightarrow{OD} = (3, 0)$.

- ¿Es correcto afirmar que $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$? Explica.

BDA U3_ACT_21

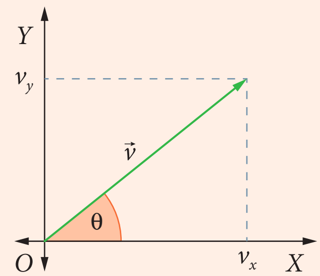
Descomposición vectorial

Todo vector $\vec{v}$ se puede descomponer en las **componentes** v_x y v_y, de manera que $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

El módulo de $\vec{v}$ se calcula por la expresión $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Utilizando razones trigonométricas, se cumple lo siguiente:

$$\cos\theta = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|} \rightarrow v_x = \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|} \rightarrow v_y = \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\,\theta$$

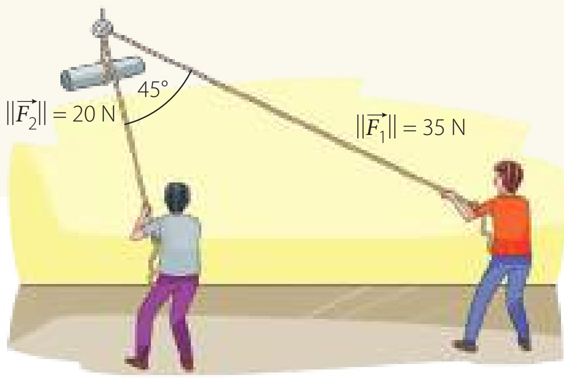


Por lo tanto, $\vec{v} = (v_x, v_y) = (\|\vec{v}\| \cdot \cos\theta, \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\,\theta)$.

- La proyección del vector $\vec{v}$ sobre el eje X es $\overrightarrow{Ov_x}$.
- La proyección del vector $\vec{v}$ sobre el eje Y es $\overrightarrow{Ov_y}$.

Ejemplo 2 Conecta con **Física**.

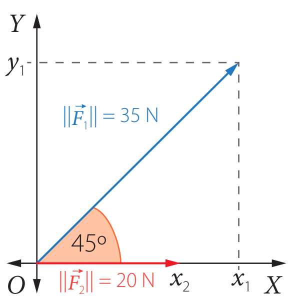
Por medio de investigaciones, dos estudiantes quieren analizar la fuerza resultante sobre un objeto. Para ello aplican dos fuerzas (F_1 y F_2) sobre el objeto que se muestra en la figura. Como has estudiado en Física, la fuerza resultante o neta sobre un cuerpo se calcula como la suma vectorial de todas las fuerzas que se aplican sobre él.



Archivo editorial.

¿Cuál es el módulo de la fuerza resultante aplicada sobre el objeto?

1. Haz coincidir uno de los vectores con un sistema de ejes cartesianos y calcula las componentes de cada vector.



Para $\vec{F_1} = (x_1, y_1)$, se cumple lo siguiente:

$$\cos 45° = \frac{x_1}{35} \leftrightarrow x_1 = 35 \cdot \cos 45° \leftrightarrow x_1 = 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\,45° = \frac{y_1}{35} \leftrightarrow x_1 = 35 \cdot \text{sen}\,45° \leftrightarrow x_1 = 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para $\vec{F_2} = (x_2, y_2)$, se tiene que $x_2 = 20$ e $y_2 = 0$.

La fuerza se relaciona con la acción de empujar un cuerpo y se mide en Newton (N). La unidad Newton es la siguiente:

$$\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

2. Suma los vectores $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$.

La suma corresponde a:

$$\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \left(35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (20, 0) = \left(35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20, 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Puedes comprobar el resultado obtenido en una calculadora *online* ingresando a *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_41*.

3. Calcula el módulo de la fuerza resultante y responde.

$$\|\vec{F_r}\| = \sqrt{\left(35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20\right)^2 + \left(35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\,025}{2} + 700\sqrt{2} + \frac{1\,225}{2}} = \sqrt{1\,625 + 700\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, el módulo de la fuerza resultante es $\sqrt{1\,625 + 700\sqrt{2}}$ N.

Ejemplo 3 » *Püpülkantun*, juego mapuche variante del palín.

Practicado por los niños del pueblo mapuche, este juego es una variante del palín y les permite desarrollar fuerza, movilidad, coordinación y estrategias por medio del dominio del *wiño*. Lo anterior promueve el trabajo en equipo en virtud de logros comunes.

El *Püpülkantu* entrega un sinfín de variantes según el territorio en que se practique, con el sentido de desarrollar en los niños la capacidad de resolver conflictos al enfrentarse con los nuevos desafíos que entrega el espacio o terreno donde se desarrolla.

Fuente: Junta Nacional de Jardines Infantiles. (Octubre de 2017). *Aukantün, Juegos mapuche para educación parvularia.* Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_42*.

Niños practicando *Püpülkantun*.

En la imagen anterior, se muestra a un grupo de niños jugando la variante del palín. Sobre ella se ha dibujado un plano cartesiano y el vector $\vec{v}$. ¿Cuál es el módulo de $\vec{v}$?

1. Describe la información de la imagen.

Respecto del vector $\vec{v}$ se tiene que $v_x = 1$ y que el ángulo que forma con el eje X mide 45°.

2. Calcula el módulo del vector.

$$\cos 45° = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \rightarrow \|\vec{v}\| = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Considerando $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, se obtiene que $\|\vec{v}\| \approx 1{,}41$.

3. Responde.

El módulo del vector es $\sqrt{2}$ o, aproximadamente, 1,41.

- ¿Cómo determinarías la medida del ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con el eje Y? Explica.

BDA U3_ACT_22 a 25

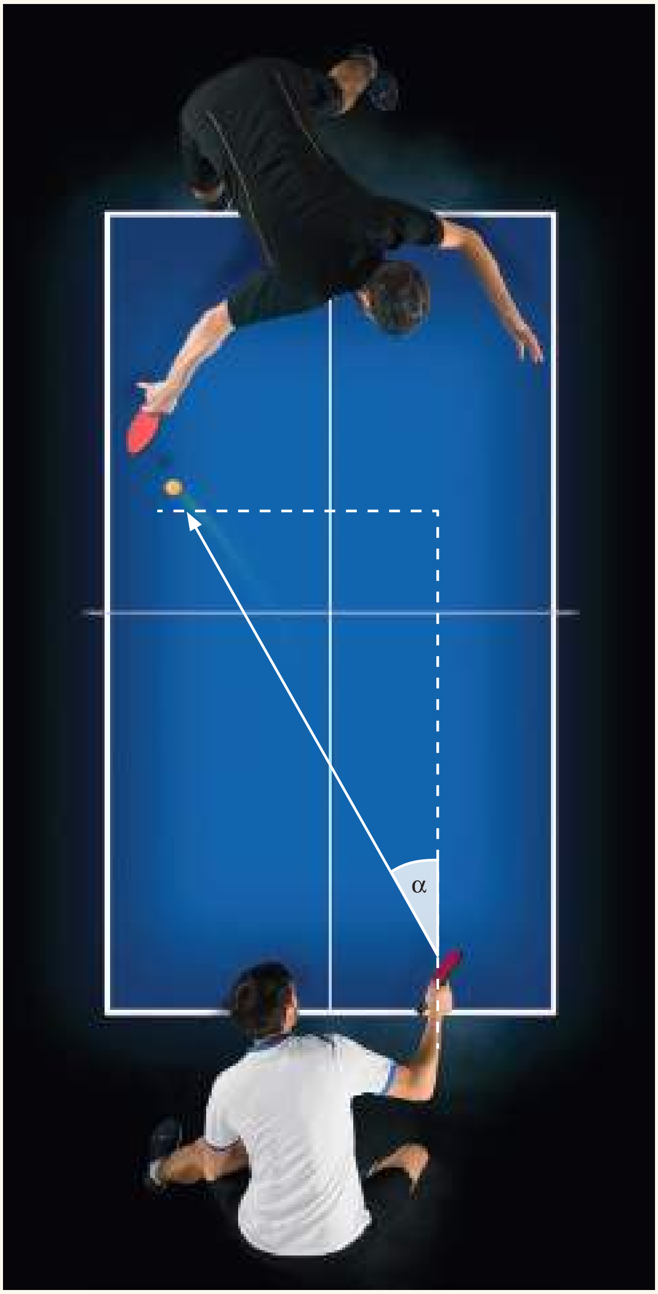
Resolución de problemas

El tenis de mesa puede ser jugado de manera individual o en modalidad de dobles. Su objetivo es golpear la pelota para que pase por encima de la red y rebote en la mitad de la mesa del adversario de tal forma que el oponente no pueda alcanzarla o devolverla correctamente.

De gran éxito en Asia, nació en Inglaterra como «ping-pong» a finales del siglo XIX. Tras una tarde lluviosa, un grupo de tenistas, frustrados por no poder jugar debido al mal tiempo, tuvieron la idea de improvisar un juego bajo techo con características parecidas al tenis, pero en miniatura. Tomaron una mesa cuadrada, en el centro pusieron una cuerda afirmada por unos maderos usándola como red y luego tomaron un implemento plano para reemplazar la raqueta y usaron corchos como pelotas.

Esta disciplina es celebrada en los Juegos Panamericanos desde la edición de Caracas 1983.

Fuente: Juegos Panamericanos y Parapanamericanos. *Tenis de mesa.* Ministerio del Deporte de Chile. Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_43*.



Shutterstock/Andrey Burmakin

Beneficios del tenis de mesa

- Mejora la coordinación.
- Refuerza tus reflejos.
- Desarrolla la concentración
- Aumenta la resistencia cardiovascular.
- Ayuda a combatir el estrés.

- ¿Has jugado tenis de mesa?, ¿crees que su práctica permite desarrollar habilidades mentales y motrices?, ¿por qué?
- ¿Qué medidas deben tomarse para prevenir accidentes antes de practicar este deporte?, ¿por qué?
- En la imagen mostrada de los jugadores de tenis de mesa, ¿qué elementos geométricos reconoces?
- ¿Cómo creen que la geometría se encuentra presente en este deporte? Compartan su respuesta con los otros grupos.

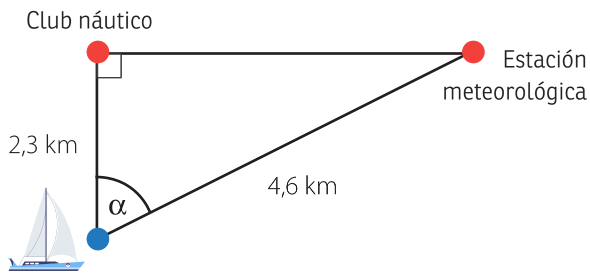
Resolución de problemas

En general, para resolver problemas puedes identificar los datos que se entregan, luego planificar lo que realizarás, después resolver y, finalmente, responder.

Ejemplo 1

Un yate se encuentra anclado en una isla. Las distancias que lo separan del club náutico y de una estación meteorológica, además de la disposición geográfica de estos tres lugares, se muestran en la imagen.

¿Cuál es la medida α del ángulo que forman los segmentos que unen el yate con el club náutico y con la estación meteorológica?



1. Expresa el valor de α aplicando la definición de una razón trigonométrica.

   Como se conocen la medida del cateto adyacente al ángulo que se quiere determinar y la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo, se utiliza la razón coseno.

$$\cos \alpha = \frac{2{,}3}{4{,}6} = \frac{1}{2}$$

2. Determina la medida del ángulo cuyo coseno es $\frac{1}{2}$.

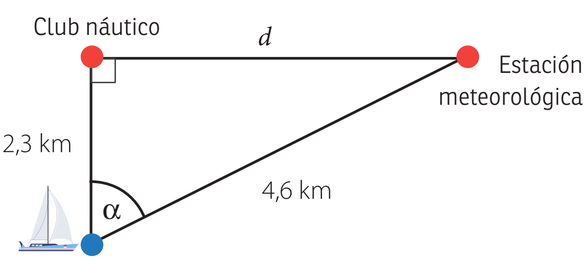
   Como se cumple que $\cos 60° = \frac{1}{2}$, entonces, $\alpha = 60°$.

3. Responde.

   La medida del ángulo es $\alpha = 60°$.

Ejemplo 2

En la situación del Ejemplo 1, ¿cuál es la distancia que separa al club náutico de la estación meteorológica? Utiliza una razón trigonométrica para responder.



1. Llama d a la distancia desconocida y expresa su valor aplicando una razón trigonométrica.

   Como se conocen la medida del cateto adyacente al ángulo de 60° y la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo, se pueden utilizar las razones tangente o seno.

$$\text{sen } 60° = \frac{d}{4{,}6} \iff d = 4{,}6 \cdot \text{sen } 60°$$

2. Reemplaza el valor $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en la expresión anterior y responde.

$$d = 4{,}6 \cdot \text{sen } 60° = 4{,}6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}3\sqrt{3} \iff 3{,}9837\ldots$$

   Por lo tanto, la distancia aproximada entre el club náutico y la estación meteorológica es 4 km.

- ¿Cómo puedes comprobar que la distancia d obtenida es correcta? Vuelve a calcularla de dos formas distintas: utilizando la razón trigonométrica tangente y aplicando el teorema de Pitágoras.

BDA U3_ACT_26

Johann Müller Regiomontano
(1436-1476)

Fue un matemático y astrónomo alemán. Es considerado uno de los fundadores de la trigonometría.

Uno de sus aportes fundamentales fue la descripción e invención de varios instrumentos útiles para la observación y medición del tiempo (relojes solares).

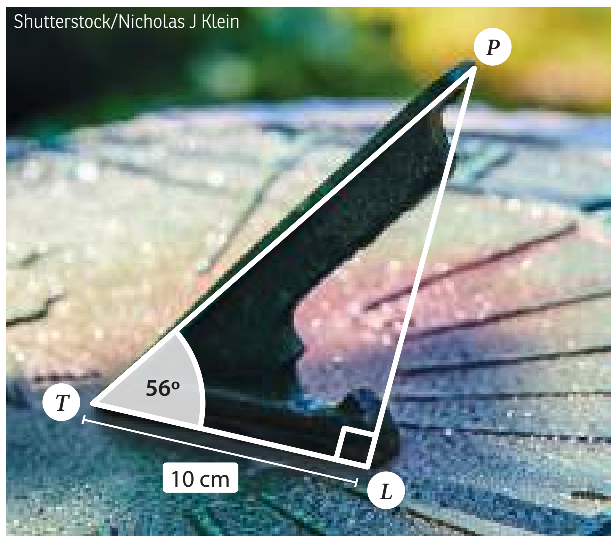
De *triangulis*, quizá su obra más importante, se compone de varios libros: en el primero, da las definiciones trigonométricas básicas, y en el segundo, establece la ley del seno y la emplea en la resolución de algunos problemas geométricos.

Fuente: A hombros de gigantes. Ciencia y tecnología. Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_44*.

Ejemplo 3

Los relojes solares son instrumentos milenarios utilizados para medir el tiempo basándose en la posición del Sol. Su principio es simple pero profundamente ingenioso. Utilizan la sombra proyectada por un objeto, conocido como *gnomon*, sobre una superficie marcada para indicar la hora del día. El gnomon, que es uno de sus componentes principales, puede tener diferentes formas, pero siempre debe estar alineado con el eje de rotación de la Tierra, es decir, apuntando hacia el polo celeste (hacia el norte en el hemisferio norte y hacia el sur en el hemisferio sur).

En la imagen se muestra un reloj de sol sobre el que se ha dibujado el triángulo rectángulo TLP. De acuerdo con los datos que se muestran, ¿cuál es la longitud del gnomon representado por el segmento $\overline{TP}$?



Gnomon de un reloj de sol.

1. Identifica los datos que se entregan.

   En la imagen se observa que la medida del ángulo LTP es 56° y la del segmento $\overline{TL}$ es 10 cm. Se quiere saber la medida del segmento $\overline{TP}$ que será representada por x.

2. Planifica qué realizarás.

   Se utilizará la razón trigonométrica coseno para determinar la medida x del gnomon.

3. Resuelve.

$$\cos 56° = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{10}{\cos 56°}$$

   Utilizando una calculadora *online* de trigonometría, se obtiene $\cos 56° = 0{,}55919... \approx 0{,}56$.

   Entonces, se cumple que $x \approx \dfrac{10}{0{,}56} = 17{,}86$.

4. Responde.

   El gnomon mide aproximadamente 17,86 cm.

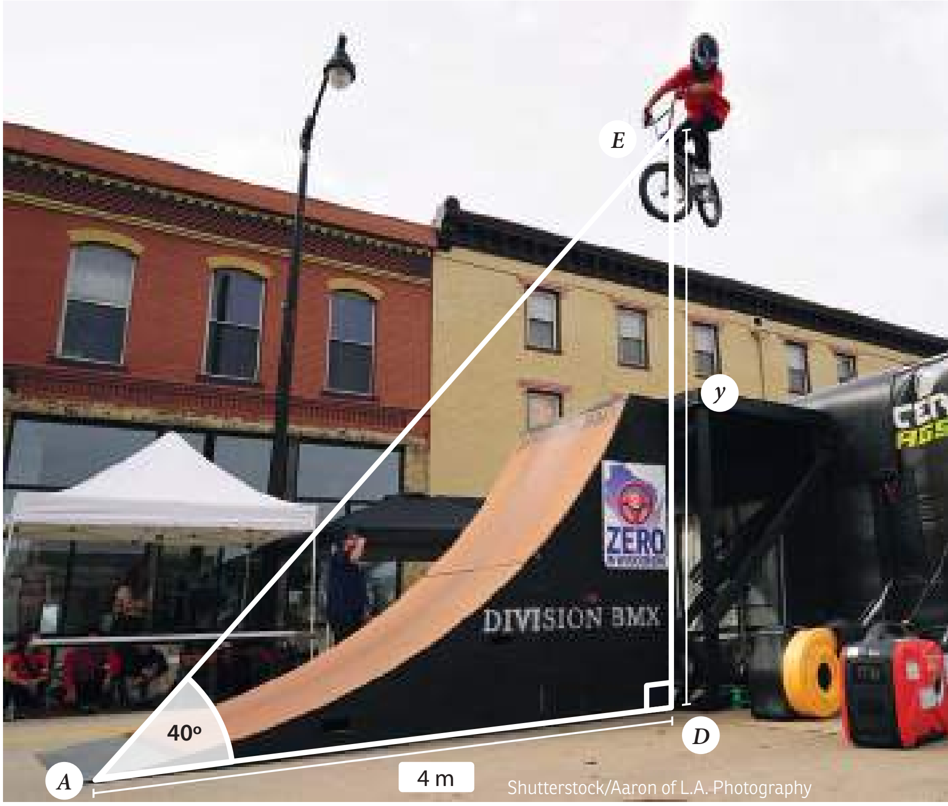
Calculadora *online* de trigonometría
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_45

Ejemplo 4

El ciclismo motocross (BMX) *freestyle* nació de la imaginación de niños y adolescentes de California en la década de 1970, inspirados por los corredores de BMX de la región. Este deporte, se hizo cada vez más popular en las décadas siguientes y se integró en los programas de competiciones de deportes extremos, como los X Games en la década del 2000 y el Festival Internacional de Deportes Extremos FISE. La primera Copa del Mundo de ciclismo BMX *freestyle* fue desarrollada por el organismo rector del ciclismo mundial, la Unión Ciclista Internacional (UCI), en 2016, como parte del FISE de ese año.

En 2020 tuvo su debut competitivo en los Juegos Olímpicos de Tokio.

Fuente: Paris 2024. Ciclismo BMX freestyle. Disponible en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_46*.



Shutterstock/Aaron of L.A. Photography

En una competencia de BMX, un competidor realiza el salto que se muestra en la imagen anterior. De acuerdo con la información que se entrega, ¿cuál es la altura y que alcanza?

1. Identifica los datos que se entregan.

   En la imagen se observa que la medida del ángulo DAE es 40° y la del segmento $\overline{AD}$ es 4 m. Se quiere saber la altura y a la que se encuentra el ciclista en la imagen.

2. Planifica qué realizarás.

   Se utilizará la razón trigonométrica tangente para determinar y.

3. Resuelve utilizando una calculadora *online* de trigonometría para determinar tan 40°.

$$\tan 40° = \frac{y}{4} \rightarrow 4 \cdot \tan 40° = y \rightarrow 4 \cdot 0{,}84 \approx y \rightarrow 3{,}36 \approx y$$

4. Responde.

   La altura aproximada que alcanza el ciclista es 3,36 m.

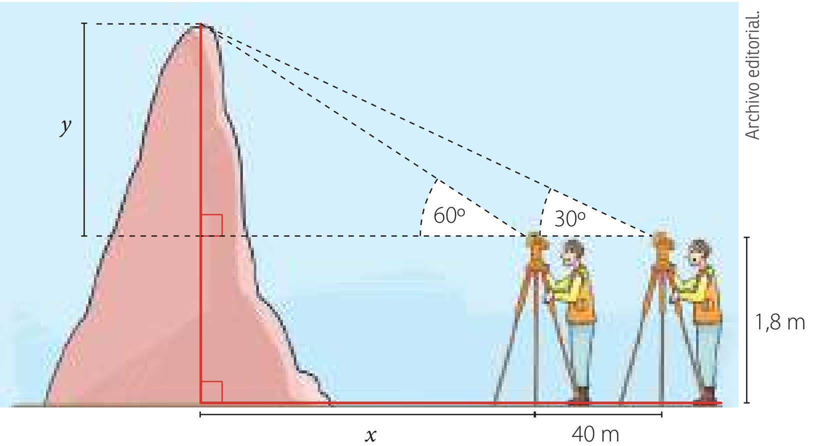
Calculadora *online* de trigonometría
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU3_47

- En el ejemplo anterior, ¿se podría haber resuelto el problema utilizando solo la razón trigonométrica cos 40°? Explica.
- ¿Piensan que el BMX es un deporte muy arriesgado?, ¿qué medidas de seguridad tomarían para su protección personal? Expliquen y compartan su respuesta con los otros grupos.

BDA U3_ACT_27

EJEMPLO 5

Un ingeniero observa la cima de un cerro con un ángulo de elevación de 30°. A continuación, se acerca 40 m y contempla la cima con un ángulo de elevación diferente al anterior, como se muestra en la imagen.



¿Cuál es la altura del cerro?

1. Identifica los datos que se entregan.

   Se representan ángulos de elevación de 30° y 60° para la observación de un cerro desde dos posiciones diferentes.

2. Planifica qué realizarás.

   Se utilizarán razones trigonométricas para determinar la altura del cerro.

3. Resuelve.

   En la imagen se observa un triángulo con un ángulo de 30° y otro con un ángulo de 60°. Al plantear las razones trigonométricas respecto de los triángulos, se obtiene lo siguiente:

$$\tan 30° = \frac{y}{x+40} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x+40} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}(x+40) = y$$

$$\tan 60° = \frac{y}{x} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \rightarrow x\sqrt{3} = y$$

   Al igualar las expresiones para y, se plantea una ecuación y luego se resuelve.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(x+40) = x\sqrt{3}$$

$$x\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 3x\sqrt{3}$$

$$40\sqrt{3} = 2x\sqrt{3}$$

$$\frac{40\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = x$$

$$20 = x$$

   Como $x = 20$ m, se tiene que $y = 20\sqrt{3}$ m. Entonces, para calcular la altura del cerro se suma el valor de y con la altura de la persona, es decir, la altura del cerro es $(20\sqrt{3} + 1{,}8)$ m.

4. Responde.

   La altura del cerro es $(20\sqrt{3} + 1{,}8)$ m.

- Si se considera una aproximación para $\sqrt{3}$, ¿es correcto afirmar que la altura del cerro es menor que 40 m? Comparte tu respuesta con el curso.

Ejemplo 6

El desplazamiento de un ave desde el punto O al punto A se representa por medio del vector $\overrightarrow{OA}$ como se muestra en la imagen. ¿Cuáles son las componentes de este vector?

Vista aérea Parque Jack Ruso, Alaska, Estados Unidos.

1. Identifica los datos que se entregan.

   En la imagen, se observa que $\|\overrightarrow{OA}\| = 5$ y que el ángulo que forma el vector con el eje X mide 30°.

2. Planifica qué realizarás.

   Se utilizarán razones trigonométricas para determinar las componentes del vector.

3. Resuelve.

$$v_x = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \cos 30° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$v_y = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \text{sen } 30° = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

4. Responde.

   Las componentes del vector son $v_x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ y $v_y = \frac{5}{2}$, es decir, $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Para finalizar la **Lección 2**...

- ¿En qué contextos la trigonometría puede servirte para resolver problemas?
- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas propuestos en la lección?
- ¿Fuiste perseverante durante el trabajo grupal de la lección?, ¿por qué?
- ¿Utilizaste correctamente las herramientas tecnológicas propuestas?, ¿por qué?
- ¿Qué dificultades tuviste para transitar entre las distintas formas de representación trabajadas?
- ¿Cuáles de los deportes descritos en la lección te gustaría practicar?, ¿por qué?

BDA U3_ACT_28 a 31

Síntesis de Unidad 3 • Geometría

Lección 1 • Razones trigonométricas

Aprendiste...

Razones trigonométricas en nuestro entorno

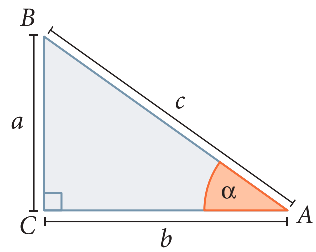
A partir de un triángulo rectángulo, las **razones trigonométricas** respecto de un ángulo corresponden a la comparación entre las longitudes de sus lados por medio de un cociente.

Las razones trigonométricas **fundamentales** son:

Seno de α $\quad$ $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$

Coseno de α $\quad$ $\cos \alpha = \dfrac{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha}{\text{medida de la hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

Tangente de α $\quad$ $\tan \alpha = \dfrac{\text{medida del cateto opuesto a } \alpha}{\text{medida del cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{a}{b}$



Valores de las razones trigonométricas

Los valores de las razones trigonométricas fundamentales, para ángulos de 30°, 45° y 60° son:

30° $\quad$ $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

45° $\quad$ $\text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan 45° = 1$

60° $\quad$ $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ y $\tan 60° = \sqrt{3}$

¿Demostraste curiosidad e interés en los ejemplos explicados? ¿Sentiste confianza en tus capacidades incluso cuando no entendiste un ejemplo en forma inmediata? Explica.

Lograste...

- Exponer ideas, opiniones y experiencias de manera coherente y fundamentada.
- Reconocer la importancia del trabajo manual e intelectual como forma de desarrollo personal.
- Utilizar *software* que resuelven las necesidades de información, dentro del entorno educativo y social inmediato.

¿Cómo el uso de *software* ayuda a resolver las necesidades de información en el estudio de la matemáticas? Justifica.

Aplicaste...

- La evaluación de modelos para compararlos entre sí y con la realidad.
- Analogías como una forma de representación para resolver problemas.
- Estrategias para comprobar resultados y soluciones de problemas.

Lección 2 • Aplicaciones de las razones trigonométricas

Aprendiste...

Ángulos de elevación y depresión

Los **ángulos de elevación** y **depresión** se forman por la intersección de dos líneas imaginarias, una horizontal y otra relacionada con la línea de mira de un observador.

Adición y sustracción de vectores

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son puntos en el plano cartesiano, el vector $\overrightarrow{AB}$ está asociado al vector posición $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \overrightarrow{AB}$.

Considerando los vectores posición $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, se define lo siguiente:

- Adición de vectores.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

- Sustracción de vectores.

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x, u_y) - (v_x, v_y) = (u_x - v_x, u_y - v_y)$$

Descomposición vectorial

Un vector $\vec{v}$ se puede descomponer en las componentes v_x y v_y.

El módulo se calcula por la expresión:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Utilizando razones trigonométricas, se tiene:

$$\cos\theta = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|} \rightarrow v_x = \|\vec{v}\| \bullet \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|} \rightarrow v_y = \|\vec{v}\| \bullet \operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto, $\vec{v} = (v_x, v_y) = (\|\vec{v}\| \bullet \cos\theta, \|\vec{v}\| \bullet \operatorname{sen}\theta)$.

Al proyectar el vector $\vec{v}$ de forma perpendicular sobre el eje X, se obtiene $\overrightarrow{Ov_x}$.

Al proyectar el vector $\vec{v}$ de forma perpendicular sobre el eje Y, se obtiene $\overrightarrow{Ov_y}$.

Resolución de problemas

Para resolver problemas puedes identificar los datos que se entregan, luego planificar lo que realizarás, después resolver y, finalmente, responder.

Cuando fue necesario, ¿trabajaste en equipo de forma responsable? ¿Ayudaste a tus compañeros y respetaste el aporte que realizaron? ¿En qué te basas para responder lo anterior?

Lograste...

- Reconocer y apreciar la igualdad de derechos entre hombres y mujeres.
- Favorecer el desarrollo físico personal y el autocuidado, en el contexto de la valoración de la vida.

¿Cómo el reconocimiento de la igualdad de derechos entre todos los ciudadanos favorece el desarrollo de la sociedad?

Aplicaste...

- La simplificación y estimación para resolver problemas.
- La descomposición en problemas más sencillos como estrategia para resolver problemas.

BDA U3_ACT_32 y 33
U3_IMA_1

Unidad 4

Probabilidad y estadística

Carácter del sistema braille.

La Ley 20 422 establece Normas sobre Igualdad de Oportunidades e Inclusión Social de Personas con Discapacidad. Se basa en los principios de vida independiente, accesibilidad universal, diseño universal, intersectorialidad, participación y diálogo social.

Fuente: Servicio Nacional de la Discapacidad. ***Ley N° 20 422***. Ministerio de Desarrollo Social y Familia de Chile. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_48*

En esta unidad aplicarás técnicas de conteo para calcular la probabilidad de eventos que puedes identificar en tu entorno social y cultural.

Shuttestock/Ro_ksy

El braille es un sistema de escritura y lectura táctil pensado para personas ciegas. En él se utilizan caracteres como los que se muestran en la imagen, formados por círculos en una matriz de 3 filas y 2 columnas de posiciones que permiten representar las letras del abecedario y los números, entre otros.

Fuente: educ.ar portal. ***Sistema braille***. Ministerio de Capital Humano de Argentina. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_49*

1. Si en el carácter braille destacado en la imagen se eligiera al azar una de sus posiciones, ¿cómo calcularías la probabilidad de que haya un círculo en él?
2. ¿Crees que es importante incorporar ascensores, pasamanos y señalizaciones en sistema braille para promover la integración y el desarrollo de la sociedad?, ¿por qué?

Habilidades del **siglo XXI**

Empatizar y comunicarse con otras personas promueve el desarrollo integral de la sociedad, generando confianza y la actitud positiva que se requiere para realizar diversas tareas de manera óptima.

- Lee acerca de la vida de Louis Braille, inventor del sistema braille, en *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_50* [**Fuente:** BBC News Mundo. (4 de enero de 2024). La historia del ingenioso niño ciego que inventó el sistema braille. *BBC Mundo*.] u otra fuente. ¿Qué aspectos puedes destacar de su actitud ante la vida y de la forma en que forjó su propio mundo?
- ¿Qué mensaje en braille pondrías en la entrada de tu sala de clases?, ¿por qué?

Conocimientos previos

- Recordar estos contenidos te ayudará a abordar el trabajo de esta unidad.

Definiciones básicas

- Experimento aleatorio: prueba o ensayo cuyo resultado no se puede saber de antemano. Solo se conocen sus resultados posibles.
- Espacio muestral: conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- Evento o suceso: conjunto de uno o más resultados de un experimento aleatorio.

Regla aditiva de la probabilidad

Sean A y B dos eventos de un experimento aleatorio. La probabilidad de la unión es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B son disjuntos, se cumple que $P(A \cap B) = 0$ y, por lo tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Regla multiplicativa de la probabilidad

Dos eventos A y B son independientes si se cumple lo siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Es decir, dos eventos son independientes si la realización de uno no afecta la ocurrencia del otro.

Ejemplos.

- Considera el experimento aleatorio de lanzar un dado de seis caras y los eventos A: se obtiene una cantidad de puntos menor que 3 y B: se obtiene una cantidad par de puntos. Entonces, se cumple que:

$$A = \{1, 2\} \qquad B = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- Considera el experimento aleatorio de lanzar dos veces un dado de seis caras y los eventos independientes
A: se obtiene 2 en el primer lanzamiento
B: se obtiene una cantidad impar de puntos en el segundo. Entonces, se verifica que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- ¿Cuál de estos contenidos necesitas repasar? Coméntalo con tu curso.

BDA U4_ACT_1 U4_VID_1

Lección 1

Técnicas de conteo

Permutaciones y variaciones

La utilización de redes sociales no solo permite comunicarse y compartir información, sino que también conlleva grandes oportunidades para el crecimiento de negocios y emprendimientos individuales, acercando a ofertantes y potenciales clientes.

Una buena gestión del uso de redes sociales necesariamente requiere de la aplicación de medidas de seguridad que permitan evitar el uso no autorizado de cuentas personales. Generar una contraseña segura es, por lo tanto, una medida que debe ser considerada seriamente al momento de crear una nueva cuenta en internet.

Shutterstock/fizkes

Gettyimages/simonkr

Observa en la primera imagen la contraseña creada por Sofía en la plataforma **RED** y en la segunda, la ingresada por Martín en la plataforma **BLUE**.

- ¿Cuántos caracteres tiene la contraseña de Sofía?, ¿y la de Martín?
- Si Sofía y Martín crearon sus contraseñas usando el máximo de caracteres que acepta su respectiva plataforma social y solo pueden usar los dígitos de 0 a 9 con repetición, ¿en cuál de las plataformas se pueden crear más contraseñas distintas? Reflexionen y justifiquen su respuesta.
- ¿Qué medidas pueden tomar para evitar el *hackeo* de su información personal en redes sociales? Comenten con el curso y compartan sus conocimientos en este tema.

Las técnicas de conteo se basan en el principio multiplicativo y se pueden utilizar para calcular la cantidad de posibles resultados de un experimento aleatorio y la cantidad de elementos que tienen sus eventos.

Principio multiplicativo

El **principio multiplicativo** señala que si un evento puede ocurrir de n_1 maneras distintas, otro evento de n_2 formas distintas y así sucesivamente, con k eventos diferentes, el número total de formas distintas en que pueden ocurrir estos eventos simultáneamente está dado por la siguiente expresión:

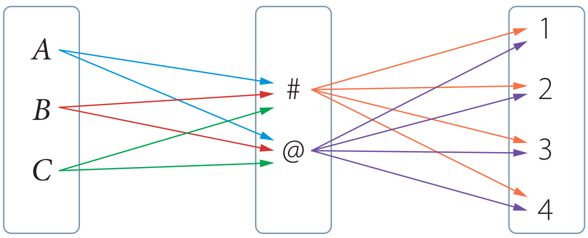
$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Ejemplo 1

En la primera clase de computación de un grupo de estudiantes, la profesora ha pedido que creen una contraseña sencilla de tres caracteres. El primero puede ser una de las letras A, B o C; el segundo, uno de los símbolos # o @ y el tercero, uno de los dígitos de 1 a 4.

¿Cuántas contraseñas distintas pueden crearse de esta manera?

1. Representa la situación mediante un diagrama.



2. Utiliza el diagrama para escribir todas las posibles contraseñas distintas que pueden crearse.

$(A\#1), (A\#2), (A\#3), (A\#4), (A@1), (A@2), (A@3), (A@4)$

$(B\#1), (B\#2), (B\#3), (B\#4), (B@1), (B@2), (B@3), (B@4)$

$(C\#1), (C\#2), (C\#3), (C\#4), (C@1), (C@2), (C@3), (C@4)$

3. Cuenta la cantidad total de posibles contraseñas distintas.

La cantidad total de contraseñas es $8 + 8 + 8 = 24$.

4. Aplica el principio multiplicativo para verificar el valor obtenido.

En la imagen se representa la contraseña como un rectángulo con tres casilleros, en que cada uno representa un evento y se señala para él la cantidad de formas distintas en que puede ocurrir.

Entonces, la cantidad de contraseñas distintas es $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

5. Responde.

El número de contraseñas distintas que pueden crearse es 24.

- Si se cambiara el orden para la asignación de símbolos a la contraseña de manera que el primer carácter fuera uno de los símbolos # o @; el segundo, uno de los dígitos de 1 a 4 y el tercero, una de las letras A, B o C, ¿cambiaría la respuesta del **Ejemplo 1**?, ¿por qué? Explica a tu curso.

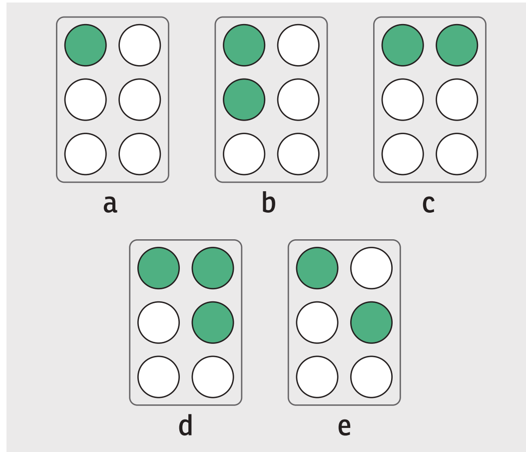
BDA U4_ACT_2 a 5

La cantidad de unidades básicas o caracteres distintos del sistema braille que se pueden definir está limitada por la estructura misma del ordenamiento en filas y columnas. Las técnicas de conteo nos permiten determinar esta cantidad en forma exacta.

Ejemplo 2

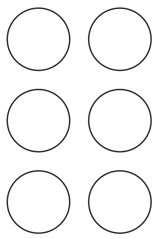
En la imagen se muestran las cinco primeras letras del abecedario expresadas en sistema braille. Como se explicó antes, cada carácter puede considerarse como un ordenamiento de seis posiciones en que puede ir un círculo coloreado o no.

Si aplicas el principio multiplicativo considerando que en cada posición hay dos estados posibles, con círculo coloreado y sin círculo coloreado, ¿cuántos caracteres distintos es posible escribir en el sistema braille?



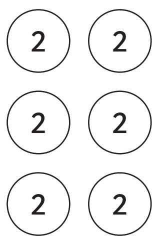
Caracteres del sistema braille.

1. Representa un carácter como 6 círculos sin colorear.



2. Escribe en cada círculo la cantidad de maneras distintas en que puede encontrarse.

   En cada posición puede haber un círculo coloreado o uno no coloreado. Por lo tanto, hay 2 maneras distintas en que puede encontrarse cada una.



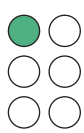
3. Aplica el principio multiplicativo para calcular la cantidad total de caracteres.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

4. Responde.

   En el sistema braille pueden escribirse 64 caracteres distintos.

- Consideren el siguiente carácter del sistema braille:



Si se deja fijo el primer círculo coloreado y los otros cinco pueden estar coloreados o no, ¿se pueden escribir más o menos de 64 caracteres distintos?, ¿por qué? Reflexionen y comenten con otros grupos.

Permutaciones simples

Una **permutación** es cada uno de los órdenes posibles con que se pueden disponer todos los elementos de un conjunto. Así, la cantidad P_n de permutaciones distintas de n elementos que se pueden hacer a partir de n elementos diferentes se calcula de la siguiente manera:

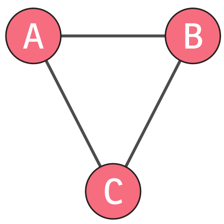
$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

en que $n \in \mathbb{N}$.

En matemática el símbolo ! denota el «factorial» de un número, que para $n \in \mathbb{N}$ se anota $n!$ y corresponde al producto de todos los números naturales menores o iguales que n. Además, se define el factorial de cero como $0! = 1$.

Ejemplo 3

Un **grafo** se puede entender como un conjunto de círculos, llamados vértices o nodos, que se unen mediante aristas o enlaces para representar las relaciones que existen entre ellos, por ejemplo, la relación de amistad entre personas o los correos enviados entre contactos de una empresa.
A continuación, se muestra un *grafo* compuesto por 3 nodos conectados entre sí.



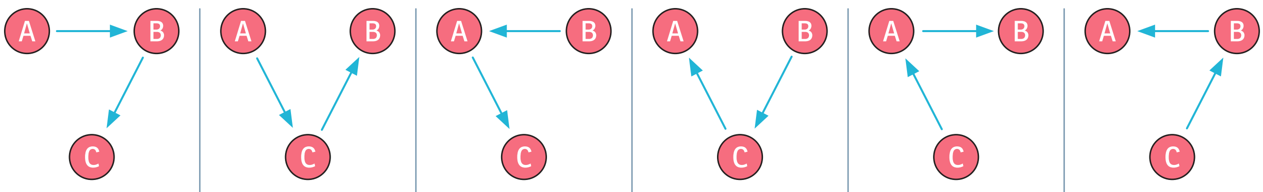
Maya Jakobine Stein
Subdirectora del Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile

Matemática e investigadora chileno-alemana que trabaja en combinatoria y teoría de grafos. Es miembro del comité científico de la Sociedad Matemática de Chile (SOMACHI) y ha trabajado como editora en diversas revistas internacionales de matemática.

Fuente: Marca Chile. (12 de mayo de 2022). ***Chilenas destacadas del mundo de las matemáticas***. Imagen de Chile. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_51*

¿Cuántos caminos distintos se pueden establecer de modo que pasen por los 3 nodos sin que lo hagan dos veces por un mismo nodo? Utiliza el concepto de permutación para responder.

1. Representa los caminos en la figura e identifícalos como un arreglo lineal de las letras A, B y C.



2. Interpreta el problema utilizando permutaciones.

   Dado que los posibles caminos pueden representarse como ordenamientos de 3 elementos, la situación puede interpretarse como la cantidad de permutaciones P_3 que pueden realizarse con tres elementos.

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

3. Responde.

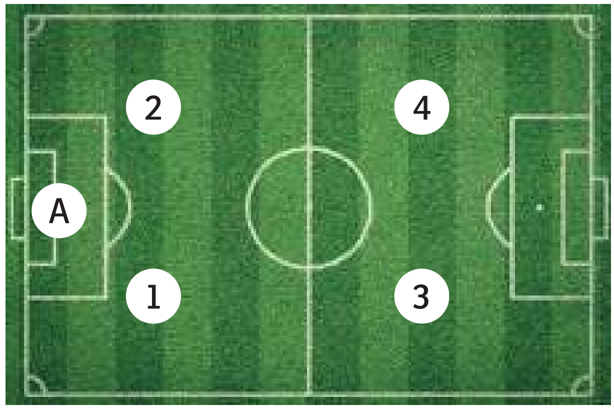
   En el grafo se pueden establecer 6 caminos distintos que cumplen los requerimientos señalados.

BDA U4_ACT_6
U4_AUD_1

Ejemplo 4

Para integrar a las personas de una comunidad, una junta de vecinos organiza un campeonato de fútbol femenino. Como se puede ver en la imagen, cada equipo está formado por 5 jugadoras: 1 arquera, representada por la letra A, y 4 jugadoras de campo, representadas por los números 1 a 4.

Si una entrenadora tiene 5 jugadoras para armar su equipo, en que la arquera es fija, ¿de cuántas maneras distintas puede distribuir a las otras 4 jugadoras en las cuatro posiciones restantes?



Shutterstock/antpkr

1. Representa las posiciones mediante casilleros numerados del 1 al 4.

Posición	1	2	3	4

2. Escribe la cantidad de maneras distintas en que puede ocuparse cada posición.

   Las posiciones se van asignando de izquierda a derecha.

Posición	1	2	3	4
Cantidad de maneras	4	3	2	1

Como aún no hay asignaciones, existen 4 posibilidades.

Como ya hay 1 jugadora asignada, existen 3 posibilidades.

Como ya hay 2 jugadoras asignadas, hay 2 posibilidades.

Como ya hay 3 jugadoras asignadas, hay 1 posibilidad.

3. Calcula la cantidad total de permutaciones.

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

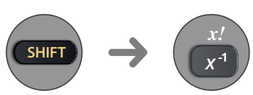
4. Responde.

   La entrenadora puede distribuir a las jugadoras de 24 maneras distintas.

- ¿Cómo pueden comprobar los resultados obtenidos en los **Ejemplos 3** y **4**? Utilicen una calculadora manual o una *online* para calcular $3!$ y $4!$ y compartan sus resultados con otros grupos.

Calculadora ***online*** para factoriales
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_52

Para calcular el factorial de un número con una calculadora científica puedes presionar los botones que se muestran en la imagen. Luego, escribes el número y pulsas «igual» (=). *



* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

Variaciones

Una **variación** es cada uno de los órdenes posibles con que se puede disponer una parte de los elementos de un conjunto. Así, para $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > m$, la cantidad V_n^m de variaciones distintas de m elementos que se pueden hacer a partir de n elementos diferentes son:

Sin repetición → $V_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ | Con repetición → $VR_n^m = m^n$

- ¿Cómo quedaría expresada la fórmula de V_n^m si $n = m$? Comenta con tu curso la relación de este resultado con el concepto de permutación.

Ejemplo 5

Renato ingresó a un nuevo trabajo y para acceder a su cuenta institucional debe crear una contraseña de cuatro caracteres. Si puede utilizar los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, sin repetirlos, ¿cuántas contraseñas distintas puede crear?

1. Construye una representación pictórica del problema.

   Se puede elaborar un diagrama para visualizar las posibles contraseñas distintas que pueden crearse. Por ejemplo, la opción 0374 puede visualizarse en el diagrama de la imagen.

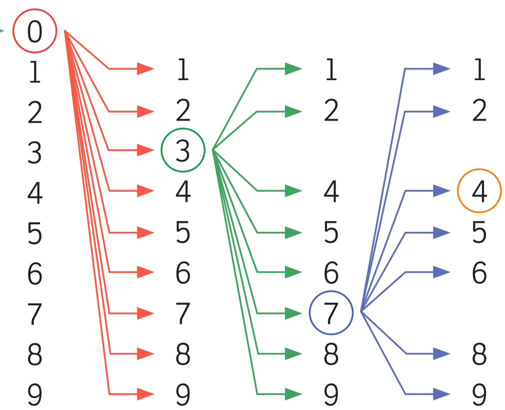


Diagrama para la contraseña 0374.

2. Analiza la representación.

   Contando las flechas en el diagrama, se observa que para elegir el primer número de la contraseña hay 10 posibilidades; para el segundo, 9; para el tercero, 8 y para el cuarto, 7.

3. Calcula la cantidad total de variaciones.

   Del análisis anterior, se deduce que los dígitos se pueden seleccionar de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$ formas distintas.

   El resultado anterior se puede comprobar aplicando la expresión para calcular la cantidad de variaciones de 4 elementos ($m = 4$) que se pueden hacer a partir de 10 elementos ($n = 10$).

$$V_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$$

4. Responde.

   Utilizando los diez dígitos sin repetirlos, se pueden crear 5 040 contraseñas distintas de cuatro dígitos.

- ¿Cómo puedes comprobar el resultado anterior? Utiliza una calculadora manual para responder.

Para determinar con una calculadora científica la cantidad de variaciones V_n^m, primero escribe el número n, luego presiona los botones que se muestran en la imagen; a continuación, digita el número m (r en la calculadora) y, finalmente, pulsa «igual» (=). *

- ¿Cómo cambiaría el resultado del **Ejemplo 5** si las variaciones fueran con repetición? Usa la calculadora para responder.

BDA U4_ACT_7 U4_IMA_1

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología de los botones que se muestran.

Permutaciones circulares

Una **permutación es circular** cuando los elementos de un conjunto se ordenan «en círculo», de manera que el primer elemento que se ordena determina el principio y el final de la muestra. Así, la cantidad PC_n de permutaciones circulares distintas de n elementos que se pueden hacer con n elementos diferentes (para $n \in \mathbb{N}$) se calcula de la siguiente manera:

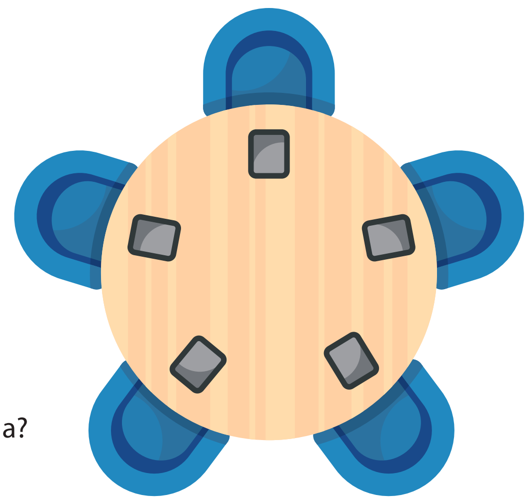
$$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$$

Ejemplo 6

En un recinto educacional se ha organizado un encuentro para promover la integración entre el profesorado y los apoderados de los estudiantes. De esta manera se espera mejorar la convivencia en el establecimiento.

Para el evento se habilitaron mesas, como la que se muestra en la imagen, con las sillas representadas en azul.

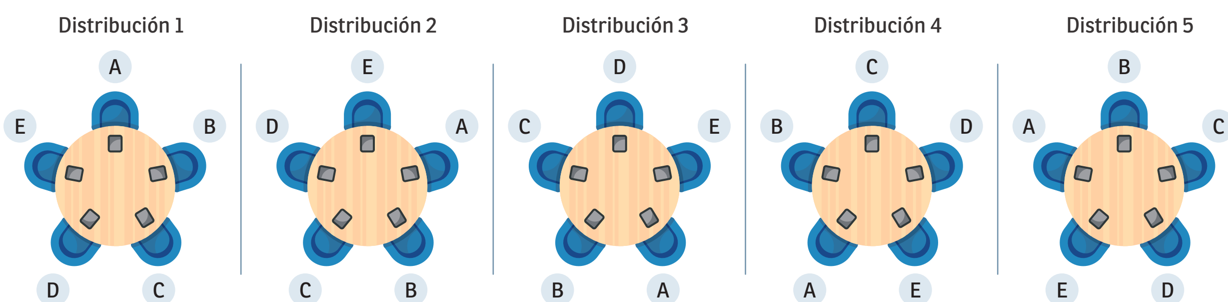
Si se asignaron 5 personas a una de las mesas, ¿de cuántas maneras distintas pueden ubicarse sentados alrededor de ella?



Geetyimages/VikiVector(editado)

1. Analiza la situación.

   Como lo que importa en un ordenamiento circular es la posición relativa de cada elemento, si se llama A, B, C, D y E a las 5 personas asignadas a la mesa y se las ubica como en la distribución 1 de la siguiente imagen, se define un ordenamiento equivalente al de las distribuciones 2, 3, 4 y 5:



2. Propón una estrategia para responder la pregunta del problema.

   Una estrategia para establecer la cantidad de distribuciones distintas que pueden darse en la mesa se logra dejando fija a la persona A en una de las sillas e ir cambiando de silla al resto de las personas.

3. Interpreta como permutación cada distribución y aplica el principio multiplicativo.

   Dado que son 4 los elementos que cambiarán de posición, la cantidad de permutaciones es la siguiente:

$$PC_5 = P_{5-1} = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

4. Responde.

   Las cinco personas pueden ubicarse sentadas alrededor de la mesa de 24 maneras distintas.

Permutaciones con repetición

Cuando en un conjunto con n elementos hay k grupos con $n_1, n_2, n_3 \ldots n_k$ elementos repetidos (en que $n, k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$), tales que $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$, la cantidad $PR_n^{n_1, n_2, n_3 \ldots n_k}$ de permutaciones con repetición distintas que se pueden formar se calcula de la siguiente manera:

$$PR_n^{n_1, n_2, n_3 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

- Si se cumple que $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = 1$, ¿el valor de $PR_n^{n_1, n_2, n_3 \ldots n_k}$ es $n!$? Comenta con tu curso.

Ejemplo 7

Considera la palabra que se muestra en la imagen.

¿Cuántas palabras distintas de cuatro letras, con significado o sin significado, se pueden formar usando todas sus letras?

AMAR

1. Escribe todas las palabras de cuatro letras que se pueden formar con las letras de AMAR.

   Para distinguir las letras A en la representación pictórica, se ha coloreado de verde una de ellas.

AMAR	ARAM	ARMA	AAMR	AARM	AMRA	← Fila 1
AMAR	ARAM	ARMA	AAMR	AARM	AMRA	← Fila 2
MRAA	MARA	MAAR	RMAA	RAMA	RAAM	← Fila 3
MRAA	MARA	MAAR	RMAA	RAMA	RAAM	← Fila 4

2. Cuenta las palabras e identifica las que se repiten.

   Hay 24 palabras. Observando las filas 1 y 2, se ve que sus palabras se repiten y que lo mismo ocurre con las de las filas 3 y 4. Entonces, eliminando las palabras de las filas repetidas 2 y 4, quedan solo 12 palabras distintas.

AMAR	ARAM	ARMA	AAMR	AARM	AMRA	← Fila 1
MRAA	MARA	MAAR	RMAA	RAMA	RAAM	← Fila 3

3. Interpreta la situación utilizando las permutaciones con repetición.

   La palabra AMAR está constituida por cuatro letras, una de las cuales aparece 2 veces (la A). Por lo tanto, se calcula P_4^2.

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{24}{2} = 12$$

4. Responde.

   Se pueden escribir 12 palabras distintas.

- ¿Qué ejemplo de su entorno se podría modelar a través de permutaciones con repetición? Reflexionen, usen su creatividad y expongan al curso un par de casos.

BDA U4_ACT_8 a 11

Combinaciones

BDA U4_AUD_2

Sistema de escritura de la cultura **Rapa Nui**

La tradición oral cuenta que el ***Ariki*** (rey) ***Hotu Matu'a*** llegó a Rapa Nui (isla grande) en dos embarcaciones llevando consigo algunas tablillas grabadas con cientos de signos complejos.

El ***rongorongo***, sistema de escritura encontrado en Rapa Nui, es un misterio que aún espera ser descifrado y que, según estudios recientes, data de antes de la llegada de los europeos a la isla.

Este sistema contiene una serie de símbolos llamados glifos que representan seres antropomórficos, animales y anzuelos, entre otros. A través de él se cree que se traspasaban de generación en generación canciones y leyendas de las tradiciones de los habitantes de la isla.

Aunque actualmente la lengua hablada por los rapa nui es el ***vanana*** de origen polinésico, se espera que nuevos estudios puedan encontrar la relación que tiene con el sistema de escritura ***rongorongo***.

Fuente: LitoralPress. Estudio sugiere que misteriosa escritura rongorongo de Rapa Nui es más antigua y original de lo que se creía. Rescatado de *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_53*.

Fuente: Conadi. (s.f.). ***Diccionario de la lengua Rapa Nui***. Ministerio de Desarrollo Social y Familia de Chile. *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_54*

Geetyimages/Creator: Atlantide Phototravel

Artesano de madera sosteniendo una tableta ***rongorongo***.

- ¿Crees que los símbolos *rongorongo* de la imagen son fáciles de descifrar?, ¿por qué?
- ¿Qué piensas que podría representar el símbolo  del *rongorongo*?, ¿y ? Comenta con tu curso.
- ¿Qué aspectos de la vida y de las costumbres de los rapa nui podríamos conocer si se logra descifrar el texto de las tablillas escritas en *rongorongo*?, ¿piensas que este conocimiento es algo valioso para las actuales generaciones de habitantes de la isla?, ¿por qué?

Combinación simple

Una **combinación** es cada uno de los grupos diferentes de una cierta cantidad de elementos, sin importar su orden, que se pueden formar a partir de los elementos de un conjunto. Así, la cantidad C_k^n de combinaciones distintas de k elementos que se pueden hacer con n elementos diferentes se calcula de la siguiente manera:

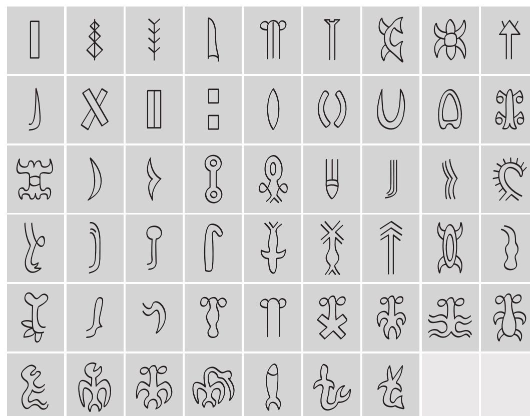
$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

en que $k, n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$.

Ejemplo 1

Supón que para expresar una idea en la escritura *rongorongo* utilizas combinaciones de 6 de los símbolos que se muestran en la imagen.

¿Cuántas combinaciones se pueden formar para expresar distintas ideas? Asume que el orden de los símbolos no importa y que no deben repetirse los símbolos.



Shutterstock/Sidhe

Símbolos del ***rongorongo***.

1. Cuenta los símbolos que hay en la imagen.

   Como se presentan en un ordenamiento rectangular de 6 filas y 9 columnas y en una de las filas faltan dos símbolos, la cantidad total es de $9 \cdot 6 - 2 = 54 - 2 = 52$.

2. Interpreta la situación utilizando combinaciones simples.

   Se debe calcular la cantidad de grupos de 6 elementos, sin repetirlos y en los que no importa el orden, que se pueden formar a partir de 52 elementos. Por lo tanto, hay que calcular C_6^{52}.

3. Calcula el número de combinaciones

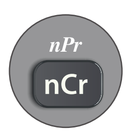
$$C_6^{52} = \frac{52!}{(52-6)! \cdot 6!} = \frac{52!}{46! \cdot 6!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \cancel{46!}}{\cancel{46!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20\,358\,520$$

4. Responde.

   Se pueden formar 20 358 520 combinaciones de símbolos para expresar distintas ideas.

- ¿Cómo puedes comprobar el resultado anterior? Utiliza una calculadora manual para comprobar que el valor de C_6^{52} es 20 358 520.

Para determinar con una calculadora científica la cantidad de combinaciones C_k^n, primero escribe el número n, luego presiona el botón que se muestra en la imagen, a continuación digita el número k (r en la calculadora) y, finalmente, pulsa «igual» (=). *



BDA U4_ACT_12
U4_IMA_2

* Dependiendo del modelo de calculadora científica, puede variar la simbología del botón que se muestra.

En álgebra estudiaste las expresiones algebraicas formadas por dos términos, llamadas binomios, y algunas de sus potencias, como, por ejemplo, su cuadrado y su cubo. Como verás a continuación, las potencias de un binomio están relacionadas con las combinaciones.

Coeficiente binomial o número combinatorio

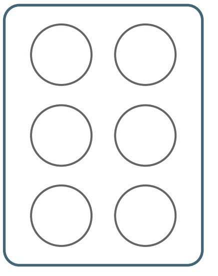
Al número de combinaciones C_k^n (en que $k, n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$) se le llama también **coeficiente binomial** o **número combinatorio** y se denota $\binom{n}{k}$. Por lo tanto, se verifica la siguiente igualdad:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

La notación $\binom{n}{k}$ (con $k, n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$) representa el coeficiente binomial y se lee «n sobre k». Su valor se puede determinar utilizando el botón nCr de una calculadora científica.

Ejemplo 2

Recordando que un carácter del sistema braille corresponde a un ordenamiento de filas y columnas, como el que se muestra en la imagen, y que cada una de sus 6 posiciones puede estar coloreada o no, ¿cómo podrías calcular la cantidad de caracteres distintos que es posible escribir utilizando el concepto de número combinatorio?



Unidad de escritura del sistema braille.

1. Interpreta la situación utilizando el concepto de número combinatorio.
   - La cantidad de combinaciones con 0 posiciones coloreadas de un total de 6 corresponde a $C_0^6 = \binom{6}{0}$.
   - La cantidad de combinaciones con 1 posición coloreada de un total de 6 corresponde a $C_1^6 = \binom{6}{1}$.

   ⋮

   - La cantidad de combinaciones con 6 posiciones coloreadas de un total de 6 corresponde a $C_6^6 = \binom{6}{6}$.
2. Resuelve los cálculos utilizando el botón nCr de la calculadora.

   La suma de los números combinatorios anteriores corresponde a la cantidad de combinaciones con 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 posiciones coloreadas de un total de 6 posiciones y, por lo tanto, permite responder la pregunta.

$$\begin{aligned} C_0^6 + C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6 + C_6^6 &= \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \\ &= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 \\ &= 64 \end{aligned}$$

3. Responde.

   La cantidad de caracteres distintos del sistema braille se puede determinar aplicando el concepto de número combinatorio y coincide con el valor calculado anteriormente: 64.

- ¿Cuál de los cálculos realizados para determinar el número de caracteres distintos del sistema braille tiene más sentido para ti, el realizado con el principio multiplicativo, en que resultó $2^6 = 64$, o el desarrollado en el **Ejemplo 2**?, ¿por qué?

Ejemplo 3

Para reunir dinero e ir en ayuda de las personas que perdieron sus viviendas en un incendio, una junta de vecinos organiza diversos juegos. Uno de ellos consiste en extraer desde una tómbola, al azar y sin reposición, 5 de las bolitas que se muestran en la imagen.

En total, ¿cuántos grupos diferentes de 5 bolitas pueden extraerse en este juego?

Shutterstock/DimaSid

1. Interpreta la situación utilizando el concepto de combinación.

   Hay 10 bolitas en la tómbola y se quiere determinar la cantidad de grupos diferentes que se pueden formar sin importar su orden. Por lo tanto, hay que calcular C_5^{10}.

2. Calcula el número combinatorio.

$$C_5^{10} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{5! \cdot \cancel{5!}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30\,240}{120} = 252$$

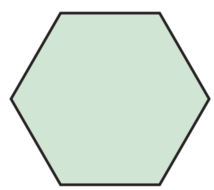
3. Responde.

   En total, se pueden extraer 252 grupos diferentes de 5 bolitas en el juego.

También puedes aplicar el concepto de combinación para calcular la cantidad de diagonales que es posible dibujar en un polígono.

Ejemplo 4

Observa el hexágono de la imagen.
¿Cuántas diagonales se pueden trazar en él?



1. Interpreta el problema aplicando el concepto de combinación.

   Dado que un hexágono tiene 6 vértices y la diagonal de un polígono se define como el segmento que une dos de sus vértices no consecutivos, el problema se resuelve calculando la cantidad de combinaciones de 2 elementos que pueden hacerse con 6 elementos y restando de esta cantidad el número de segmentos que corresponden a los lados del hexágono, es decir, 6. Por lo tanto, hay que calcular $C_2^6 - 6$.

2. Calcula el resultado de la operación.

$$C_2^6 - 6 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} - 6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!} - 6 = \frac{30}{2} - 6 = 15 - 6 = 9$$

3. Responde.

   En el hexágono de la imagen se pueden trazar 9 diagonales.

- ¿Es correcto afirmar que $C_2^7 = C_5^7$ y, en general, que $C_k^n = C_{(n-k)}^n$ para $n, k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$? Discútanlo al interior del grupo y compartan su respuesta con otros grupos.

BDA U4_ACT_13

Combinaciones con repetición

La cantidad CR_k^n de **combinaciones con repetición** de k elementos de un conjunto con n elementos se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$CR_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

en que $k, n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$.

Que una combinación sea con repetición quiere decir que cualquiera de los n elementos se podría repetir hasta k veces.

- Para el valor de C_k^n, ¿cómo interpretarías los casos en que $n = k$ y $k = 1$? Comenta con tu curso.

Ejemplo 5

Durante la celebración del aniversario de un colegio, la directiva de un curso venderá barquillos de helado simples (de una bolita), dobles (de dos bolitas) y triples (de tres bolitas). Los sabores que ofrecen son los que se muestran en la imagen.
¿Cuántos barquillos de helado simples distintos pueden servir?, ¿y dobles?, ¿y triples? Considera que dos helados son iguales si están formados por los mismos sabores, sin importar el orden que tienen en el barquillo.

Shutterstock/baibaz

1. Interpreta el problema aplicando el concepto de combinación.

   El grupo de estudiantes ofrece 5 sabores de helado y en un barquillo simple sirven 1 bolita de helado; en uno doble, 2 bolitas y en uno triple, 3 bolitas. Como los sabores pueden repetirse y no importa el orden en que se ubican, hay que calcular $C_1^5 = CR_1^5$ para el barquillo de 1 bolita, CR_2^5 para el barquillo de 2 bolitas y CR_3^5 para el de 3 bolitas.

2. Calcula los números combinatorios.

Barquillo simple

$$\begin{aligned} C_1^5 = CR_1^5 &= \frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} \\ &= \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 1!} \\ &= \frac{5}{1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Barquillo doble

$$\begin{aligned} CR_2^5 &= \frac{(5+2-1)!}{(5-1)! \cdot 2!} \\ &= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{30}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Barquillo triple

$$\begin{aligned} CR_3^5 &= \frac{(5+3-1)!}{(5-1)! \cdot 3!} \\ &= \frac{7!}{4! \cdot 3!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{210}{6} \\ &= 35 \end{aligned}$$

3. Responde.

   La cantidad de barquillos simples, dobles y triples distintos que pueden servir son 5, 15 y 35, respectivamente.

- ¿Por qué en el **Ejemplo 5** se afirma que $C_1^5 = CR_1^5$? Reflexionen promoviendo la participación de todos los integrantes del grupo y compartan su respuesta con el curso.

Para estudiar las características de una población se pueden realizar muestreos aleatorios. Cuando la población es grande, no hay demasiada diferencia entre hacer un muestreo aleatorio con reemplazo o sin reemplazo. Sin embargo, esto no es así para poblaciones pequeñas. Aplicando combinaciones, puedes verificar esto.

Ejemplo 6

Se seleccionarán al azar muestras aleatorias de 3 personas desde las siguientes poblaciones A y B:

Población A 

Población B 

Las muestras pueden escogerse con reemplazo, en cuyo caso es posible seleccionar un mismo elemento más de una vez, o sin reemplazo, en cuyo caso un elemento que ha sido seleccionado no puede volver a ser elegido. ¿Para cuál de las poblaciones es mayor la razón entre la cantidad de muestras distintas con reemplazo y sin reemplazo que se pueden formar?, ¿cómo se podría interpretar este resultado?

1. Calcula la cantidad de muestras distintas con reemplazo y sin reemplazo para la población A.

Combinaciones con reemplazo en población A

$$CR_3^5 = \frac{(5+3-1)!}{(5-1)! \cdot 3!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$$

Combinaciones sin reemplazo en población A

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} = \frac{20}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

2. Calcula la cantidad de muestras distintas con reemplazo y sin reemplazo para la población B.

Combinaciones con reemplazo en población B

$$CR_3^{10} = \frac{(10+3-1)!}{(10-1)! \cdot 3!} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1\,320}{6} = 220$$

Combinaciones sin reemplazo en población B

$$C_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$$

3. Calcula las razones.

Población A ➜ $35 : 10 = 3{,}5$ | Población B ➜ $220 : 120 \approx 1{,}83$

4. Responde.

La razón es mayor para la población A. Este resultado se puede interpretar señalando que al crecer una población, la razón entre la cantidad de muestras con reemplazo y sin reemplazo disminuye y que, por lo tanto, las posibilidades de seleccionar un elemento más de una vez en un muestreo aleatorio son menores.

- ¿Están de acuerdo con la interpretación del resultado del **Ejemplo 6**?, ¿por qué? Reflexionen y discutan su respuesta con el curso.

Para finalizar la **Lección 1**...

- ¿Cuáles son las principales diferencias que te permiten distinguir permutaciones, variaciones y combinaciones?
- ¿Qué estrategias aplicaste para resolver los problemas de la lección?, ¿te facilitaron el trabajo?, ¿por qué?
- ¿Crees que el uso de analogías y situaciones cercanas te ayudó a comprender los contenidos de la lección?, ¿por qué?
- ¿Cómo se podría lograr equiparar los derechos de todas las personas que componen una sociedad?
- ¿Piensas que es importante analizar en forma crítica la información que hay en redes sociales?, ¿por qué?
- ¿Cómo se enriquece la sociedad si sus integrantes tienen distintas capacidades y potencialidades?

BDA U4_ACT_14 a 17

Lección 2

Cálculo de probabilidades

Probabilidades y azar

Los juegos de azar despiertan gran interés y han inspirado algunos conceptos fundamentales de la ciencia. Un ejemplo de ellos son los juegos con dados, que han acompañado a la humanidad desde sus inicios y que, hasta el siglo XVI, carecían de un método formal para cuantificar sus resultados.

A partir de los trabajos de matemáticos como Cardano, Huygens y Pascal se abordaron matemáticamente muchos de los juegos de azar más populares, como el juego de dados, el de cartas y el dominó, entre otros.

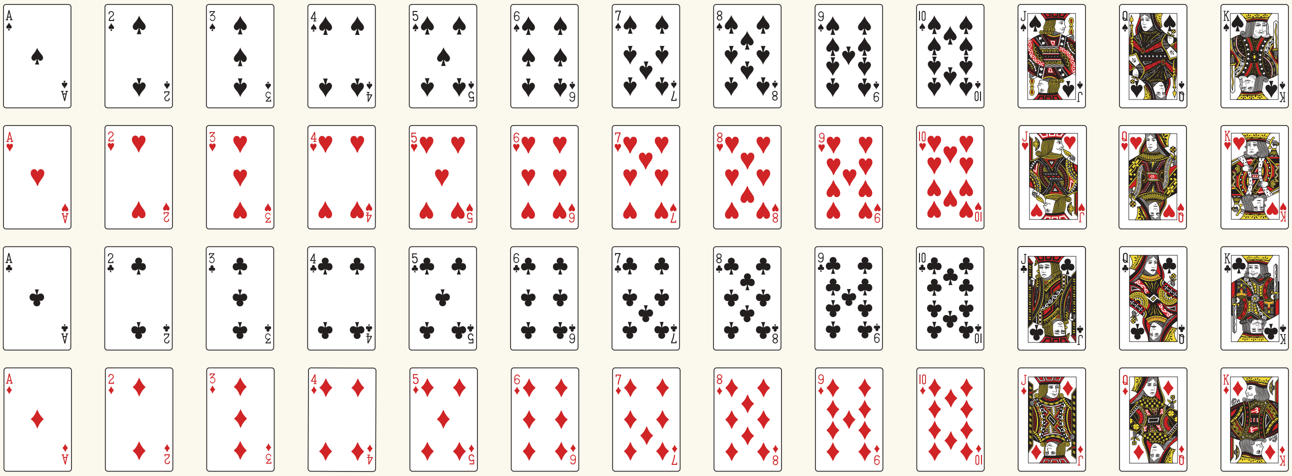
El póker fue estudiado por el matemático John von Neumann, que aplicó la teoría de juegos como herramienta probabilística para anticipar las posibilidades de ganar el juego teniendo en consideración tanto su naturaleza aleatoria como las posibles estrategias aplicadas por los otros jugadores.

En el póker gana el participante que consigue una «mano» de 5 cartas menos probable que los otros participantes y se juega con una baraja de naipe inglés (o francés) como la siguiente:

John von Neumann
(1903-1957)

Matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en física cuántica, teoría de juegos, ciencias de la computación y economía, entre otras disciplinas.

Fuente: BBC News Mundo. (19 de noviembre de 2016). *7 afortunados casos en los que los juegos de azar cambiaron las matemáticas. BBC Mundo.* *http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_55*



- ¿Cómo calcularías rápidamente la cantidad de cartas que componen la baraja de naipe inglés de la imagen? Explica a tu curso.
- En la baraja puedes identificar cuatro «pintas»: picas ♠, corazones ♥, tréboles ♣ y diamantes ♦. ¿Cómo calcularías cuántas cartas componen cada «pinta»?
- Si se revuelve la baraja de naipe inglés y se extrae una carta al azar, ¿piensas que los eventos posibles son equiprobables?, ¿por qué? Reflexiona y explica a partir de lo que sabes.
- ¿Has jugado naipes u otro juego de azar?, ¿qué aspectos positivos puedes nombrar de este tipo de juegos en relación con la recreación y la convivencia social entre las personas?

Regla de Laplace

La **regla de Laplace** permite calcular la probabilidad de un evento A cuando todos los resultados posibles del experimento aleatorio (o espacio muestral Ω) pueden contarse y, además, cada resultado se puede asumir como equiprobable. Para un experimento aleatorio de estas características (con $\#\Omega \neq 0$), la probabilidad de A se denota $P(A)$ y corresponde al cociente entre los casos favorables al evento A y la cantidad de casos totales. Esto se expresa mediante la siguiente igualdad:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

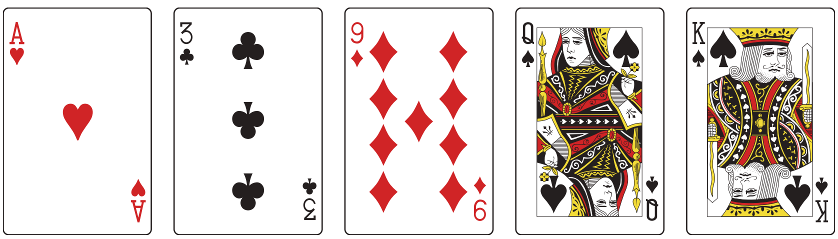
en que A es un evento del experimento aleatorio y Ω es su espacio muestral.

El símbolo # representa la «cardinalidad» de un conjunto, es decir, la cantidad de elementos que posee.

Ejemplo 1

En el juego de naipes, se llama «mano» al conjunto de cartas extraídas al azar que recibe cada uno de los jugadores.

Si se extrae al azar una «mano» de 5 cartas desde una baraja de naipe inglés (de 52 cartas), ¿cuál es la probabilidad de que esté formada por las siguientes cartas?



1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
   - Todas las combinaciones de 5 cartas extraídas al azar desde la baraja tienen la misma probabilidad, es decir, son equiprobables.
   - La cantidad de combinaciones de 5 cartas se puede contar, es decir, hay una cantidad finita de ellas.

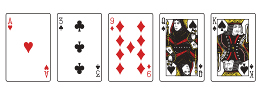
   Por lo tanto, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral del experimento aleatorio contiene todas las combinaciones de 5 elementos que pueden hacerse a partir de 52 elementos y, por lo tanto, su cardinalidad es C_5^{52}.

$$\#\Omega = C_5^{52} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \cancel{47!}}{\cancel{47!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{311\,875\,200}{120} = 2\,598\,960$$

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: obtener la «mano» . Como esta combinación es única, se tiene que $\#A = 1$.

4. Aplica la regla de Laplace y responde.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{2\,598\,960} \approx 0{,}000000385$$

   La probabilidad aproximada de obtener la «mano» señalada es 0,0000004.

BDA U4_ACT_18

Utilizando las técnicas de conteo que aprendiste anteriormente y aplicando la regla de Laplace, puedes calcular las probabilidades de muchas combinaciones particulares de cartas en el juego de naipes.

Ejemplo 2

En el juego de cartas, una escalera de color consiste en 5 cartas que forman una secuencia de números consecutivos de una misma «pinta». En la imagen, se muestra una de las escaleras que se pueden obtener desde una baraja.

¿Cuál es la probabilidad de formar una escalera de color al extraer al azar 5 cartas desde una baraja de naipe inglés?

Escalera de color. Nota que en el juego de naipes las cartas **K** y **as** se consideran consecutivas.

Shutterstock/Tatiana Popova

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

   Al igual que en el ejemplo **Ejemplo 1**, se constata que existe equiprobabilidad y que la cantidad de eventos posibles es finita. Por lo tanto, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   En el **Ejemplo 1** se calculó la cardinalidad del espacio muestral como $\#\Omega = C_5^{52} = 2\,598\,960$.

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: obtener una escalera de color.

   Con las cartas de una «pinta» dada se pueden formar 13 escaleras de color, ya que cada una de las escaleras puede comenzar con una de las 13 cartas de la «pinta».

   Como hay 4 «pintas» en una baraja, la cantidad de casos favorables al evento A (o cardinalidad de A) son las siguientes:

$$\#A = 4 \cdot 13 = 52$$

4. Aplica la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{52}{2\,598\,960} \approx 0{,}000020008$$

5. Responde.

   La probabilidad aproximada de obtener una escalera de color es 0,00002.

- ¿De qué otra forma comprobarías que el valor de C_5^{52} es 2 598 960? Utiliza una calculadora *online* o una manual para responder. En la calculadora *online* debes escribir lo siguiente: 52ncr5.

Calculadora combinatoria *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_56

Ejemplo 3

Mano que consta de 4 ases y una carta cualquiera.

Se extraen al azar 5 cartas desde una baraja de naipe inglés. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una «mano» como la que se muestra en la imagen?

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

   Según se vio en los ejemplos anteriores, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   En el **Ejemplo 1** se calculó la cardinalidad del espacio muestral como $\#\Omega = C_5^{52} = 2\,598\,960$.

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: obtener una «mano» con 4 ases. Teniendo en cuenta que en una baraja de naipe inglés hay 4 ases, que no importa el orden en que estos salgan y que la quinta carta puede ser cualquiera de las otras 48, se deduce que hay 48 casos favorables, es decir, que $\#A = 48$.

4. Aplica la regla de Laplace y responde.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{48}{2\,598\,960} \approx 0{,}0000185$$

La probabilidad aproximada de obtener una «mano» con 4 ases es 0,0000185.

Ejemplo 4

Al extraer al azar 5 cartas desde una baraja de naipe inglés, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 1 as?

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

   Según se vio en los ejemplos anteriores, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   Anteriormente se calculó la cardinalidad del espacio muestral como $\#\Omega = C_5^{52} = 2\,598\,960$.

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: obtener exactamente 1 as. Teniendo en consideración que el as que se extrae puede ser cualquiera de los 4 que hay en la baraja y que esta carta debe presentarse junto a otras 4 cualesquiera de las restantes 48 cartas que no son ases, la cantidad de casos favorables es la siguiente:

$$\#A = 4 \cdot C_4^{48} = 4 \cdot \frac{48!}{(48-4)! \cdot 4!} = 4 \cdot \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot \cancel{44!}}{\cancel{44!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \cancel{4} \cdot \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4\,669\,920}{6} = 778\,320$$

4. Aplica la regla de Laplace y responde.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{778\,320}{2\,598\,960} \approx 0{,}29947364$$

La probabilidad aproximada de obtener exactamente 1 as es 0,3.

BDA U4_ACT_19

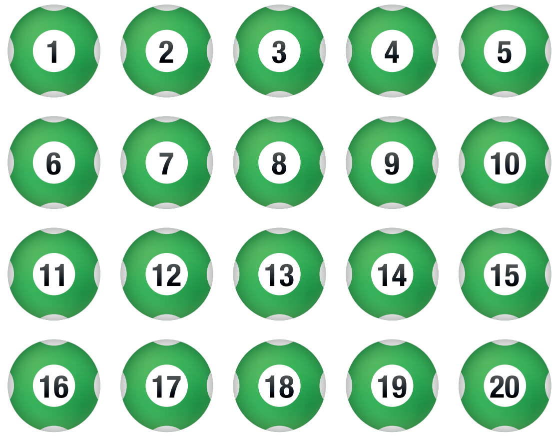
Las técnicas de conteo te permiten también calcular las posibilidades que existen en otros juegos de azar, como, por ejemplo, el sorteo de combinaciones de números.

Ejemplo 5

El centro de apoderados de un colegio realiza un bingo para reunir dinero que se destinará a implementar rampas de ingreso al edificio para personas que se trasladan en silla de ruedas. Un sorteo consiste en seleccionar al azar 4 de las bolas que se muestran en la imagen.

Los cartones con los que se puede participar en el juego contienen 4 números de 1 a 20.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona acierte los 4 números seleccionados al azar si va a comprar un cartón?



Shutterstock/LuckyBall

Conjunto de bolas desde las que se extraen 4 para un sorteo.

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
   - Todas las combinaciones de 4 números tomadas de los números 1 a 20 tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas, es decir, son equiprobables.
   - La cantidad de combinaciones de 4 números tomadas de los números de 1 a 20 se puede contar, es decir, hay una cantidad finita de ellas.

   Por lo tanto, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral del experimento aleatorio contiene todas las combinaciones de 4 elementos que pueden hacerse desde un total de 20 elementos y, por lo tanto, su cardinalidad es C_4^{20}.

$$\#\Omega = C_4^{20} = \frac{20!}{(20-4)! \cdot 4!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{116\,280}{24} = 4\,845$$

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: comprar un cartón que tenga los 4 números que serán sorteados en el bingo.

   Como esta combinación es única, se tiene que $\#A = 1$.
4. Aplica la regla de Laplace y responde.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{4\,845} \approx 0{,}000206398$$

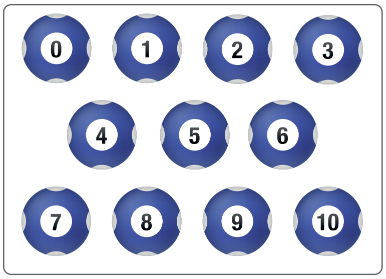
5. Responde.

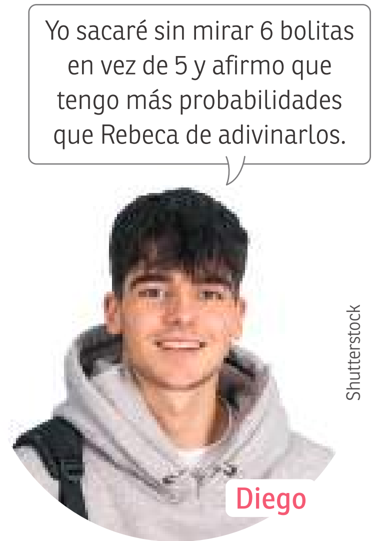
   La probabilidad aproximada de acertar a los 4 números sorteados si se compra un cartón es 0,0002.

- ¿Cómo determinarías la probabilidad de acertar en el **Ejemplo 5** si la persona comprara 10 cartones en vez de 1? Reflexiona, realiza algunos supuestos y compara tu respuesta con las del curso.
- ¿Qué combinación de 4 números seleccionarías si quisieras ganar un sorteo como el descrito en el **Ejemplo 5**?, ¿piensas que tu combinación tiene más probabilidades de ganar que cualquier otra?, ¿por qué?

EJEMPLO 6

Observa las bolitas que se muestran en la imagen y analiza lo que Rebeca y Diego afirman.





Shutterstock

¿Es correcta la afirmación de Diego?

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
   - Todas las combinaciones de 5 números tomadas de los números 0 a 10 tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas, es decir, son equiprobables. Lo mismo ocurre para las combinaciones de 6 números.
   - La cantidad de combinaciones de 5 o 6 números tomadas de los números 0 a 10 se puede contar, es decir, hay una cantidad finita de ellas.

   Por lo tanto, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

2. Define los espacios muestrales, Ω_R para Rebeca y Ω_D para Diego, y determina la cantidad total de elementos que poseen con una calculadora.

Rebeca	Diego
$\#\Omega_R = C_5^{11} = 462$	$\#\Omega_D = C_6^{11} = 462$

3. Define los eventos de interés y calcula la cantidad de casos favorables a cada uno.

Rebeca	Diego
El evento es R: adivinar los 5 números que se seleccionarán al azar. Como se trata de una combinación en particular, se cumple que $\#R = 1$.	El evento es D: adivinar los 6 números que se seleccionarán al azar. Como se trata de una combinación en particular, se cumple que $\#D = 1$.

4. Aplica la regla de Laplace.

   Como la cantidad de casos favorables y la de casos totales para cada uno son iguales, también lo son sus probabilidades.

$$P(R) = P(D) = \frac{1}{462} \approx 0{,}00216450$$

5. Responde.

   La afirmación de Diego no es correcta, ya que la probabilidad es la misma.

- Nota en el **EJEMPLO 6** que $5 + 6 = 11$. ¿Determina esta relación numérica que las probabilidades sean iguales?, ¿por qué? Reflexiona a partir de la igualdad $C_k^n = C_{n-k}^n$, para $n, k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$.

BDA U4_ACT_20

Otro juego de azar que puede ser descrito usando técnicas de conteo es el dominó, que se juega con fichas que están divididas en dos partes, cada una conteniendo entre 0 y 6 puntos.

Ejemplo 7

El dominó tradicional se juega con fichas que, como se observa en la imagen, están divididas en dos partes iguales, cada una conteniendo entre 0 y 6 puntos. Se llama «chancho» a las fichas que tienen la misma cantidad de puntos en ambas partes.

Considerando que no existen dos fichas iguales, ¿cuál es la probabilidad de sacar un «chancho» al extraer al azar una de las fichas de un juego completo de dominó?

Gettyimages/EricFerguson

↑ Algunas fichas de dominó.

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
   - Todas las fichas de dominó tienen la misma probabilidad de ser extraídas, es decir, son equiprobables.
   - La cantidad total de fichas de un juego se puede contar, es decir, hay una cantidad finita de ellas.

   Por lo tanto, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral del experimento aleatorio contiene todas las combinaciones de 2 elementos con repetición que pueden hacerse desde un total de 7 elementos (ya que los números van de 0 a 6). Por lo tanto, su cardinalidad es CR_2^7.

$$\#\Omega = CR_2^7 = \binom{7+2-1}{2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: obtener un «chancho» al extraer al azar una ficha de dominó.

   Como existe un chancho por cada uno de los números 0 a 6, se tiene que $\#A = 7$.
4. Aplica la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

5. Responde.

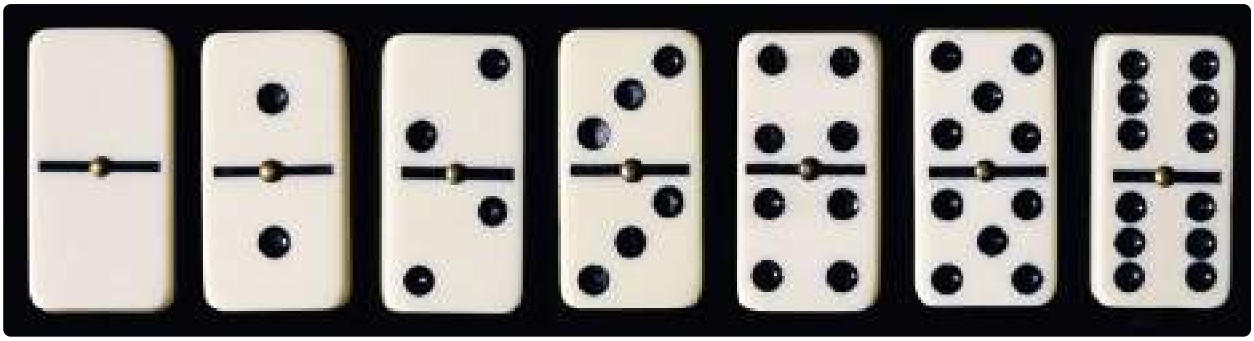
   La probabilidad de obtener un «chancho» en el juego de dominó es 0,25 o 25%.

- ¿De qué otra forma comprobarías que el valor de CR_2^7 es 28? Utiliza una calculadora *online* o una manual y responde.

Calculadora combinatoria *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_57

Ejemplo 8

En una partida de dominó tradicional, un jugador extraerá al azar un lote de 8 fichas. ¿Cuál es la probabilidad de que en su lote estén las fichas que se muestran en la imagen?



Shuttersotck/Sergio Gutierrez Getino

«Chanchos» del dominó.

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
   - Todas las combinaciones de 8 fichas tienen la misma probabilidad de ser extraídas, es decir, son equiprobables.
   - La cantidad total de combinaciones de 8 fichas se pueden contar, es decir, hay una cantidad finita de ellas.

   Por lo tanto, se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.
2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral del experimento aleatorio contiene todas las combinaciones de 8 elementos que pueden hacerse desde un total de 28 elementos (ya que hay 28 fichas en un juego de dominó tradicional). Por lo tanto, su cardinalidad es C_8^{28}.

$$\#\Omega = C_8^{28} = \frac{28!}{(28-8)! \cdot 8!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \cancel{20!}}{\cancel{20!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{125\,318\,793\,600}{40\,320} = 3\,108\,105$$

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: obtener los 7 «chanchos» al extraer al azar 8 fichas de dominó.

   Como en el lote de 8 fichas 7 son «chanchos» y la octava puede ser cualquiera de las otras 21 fichas que no son «chanchos», se tiene que $\#A = 21$.
4. Aplica la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{21}{3\,108\,105} \approx 0{,}00000676$$

5. Responde.

   La probabilidad aproximada de obtener los 7 «chanchos» al extraer al azar 8 fichas es 0,000007.

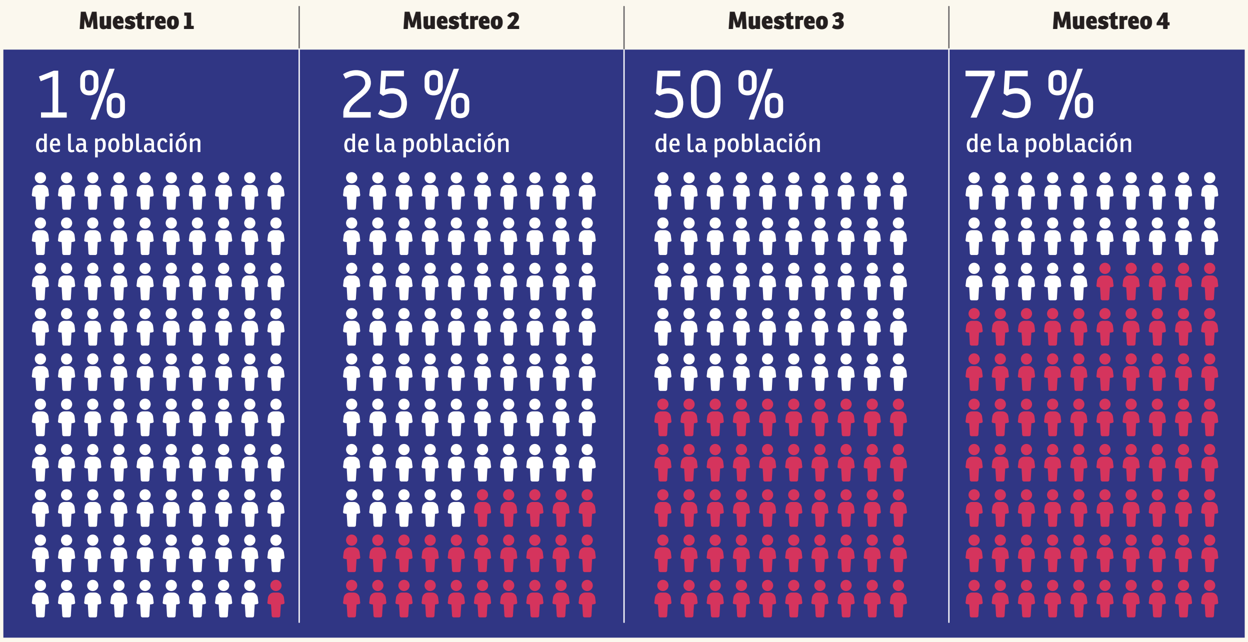
- Considera el paso 3 del **Ejemplo 8**. ¿Se tuvo en cuenta el orden de aparición de los «chanchos» o no es relevante para el cálculo realizado? Reflexiona y comenta con el curso.
- ¿Qué opinas del uso de las técnicas de conteo para determinar probabilidades en los juegos de azar estudiados?, ¿piensas que te han ayudado a comprenderlos mejor?, ¿por qué? Reflexionen y por turnos expresen sus opiniones.

BDA U4_ACT_21 a 24

Probabilidades en la sociedad

Para realizar estudios acerca del comportamiento de la sociedad actual, se realizan procesos de muestreo aleatorio adecuados que aseguren que cualquier persona pueda ser seleccionada en la muestra. Estos procesos estadísticos requieren conocer la cantidad total de muestras posibles de seleccionar. Cuando dentro de la población hay variables de interés relacionadas con algún subgrupo específico de individuos, sus características deben ser salvaguardadas.

El muestreo que se utiliza habitualmente en las técnicas estadísticas es el aleatorio sin reemplazo que, mediante una analogía, puede entenderse considerando a la población como una tómbola con bolitas y a la muestra como las bolitas que se obtienen al extraerlas al azar y sin reemplazo. Por ejemplo, en la siguiente imagen se muestran cuatro posibles muestreos aleatorios sin reemplazo desde una misma población:



Shutterstock/The Studio(editado)

En cada caso se puede establecer la cantidad total de muestras diferentes que podrían obtenerse de la población utilizando la combinatoria simple.

Muestreo 1	Muestreo 2	Muestreo 3	Muestreo 4
Cantidad de muestras diferentes:	Cantidad de muestras diferentes:	Cantidad de muestras diferentes:	Cantidad de muestras diferentes:
$C_{1}^{100} = \binom{100}{1}$	$C_{25}^{100} = \binom{100}{25}$	$C_{50}^{100} = \binom{100}{50}$	$C_{75}^{100} = \binom{100}{75}$

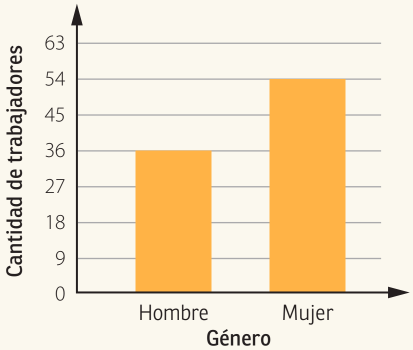
- ¿Cuál de los números combinatorios anteriores puedes calcular mentalmente?, ¿cómo lo harías y cuál es su valor? Comparte tu respuesta con tu curso.
- ¿Cuáles de los números combinatorios anteriores tienen el mismo valor?, ¿cómo lo sabes? Explica.
- Si en un colegio el 65 % de los estudiantes son mujeres y el resto son hombres, ¿cómo podrían realizar un muestreo que conserve esta razón entre mujeres y hombres? Usen su creatividad para describir cómo realizarían el muestreo y expliquenlo al curso.
- ¿Qué característica del alumnado de un colegio podría requerir una muestra que conservara la razón entre mujeres y hombres de la población para que el estudio fuera más representativo de la realidad? Compartan y comparen su respuesta con las de los otros grupos.

Ejemplo 1 » Conecta con **Historia, Geografía y Ciencias Sociales**.

En el contexto de la globalización, se encargó a una oficina de estudios públicos una investigación acerca de las condiciones laborales de los 90 trabajadores de una empresa multinacional, cuya distribución por género se muestra en el gráfico de la imagen. Para realizar su estudio, la oficina realizará un muestreo aleatorio sin reemplazo, seleccionando 10 individuos de la población considerada.

Como has estudiado en **Historia, Geografía y Ciencias Sociales**, evitar la discriminación de género permite reconocer la diversidad que existe en la sociedad. Inspirándose en este principio, una agencia verificará que la muestra sea realmente representativa de la población estudiada.

Distribución por género de los trabajadores de la empresa



¿Cuál es la probabilidad de que la muestra extraída conserve la razón entre mujeres y hombres que existe en la población?

1. Interpreta la situación.

   Para mantener la razón entre la cantidad de mujeres y hombres en la muestra, se calculan los porcentajes que representan en la población y se aplican a la muestra de 10 individuos.

   Porcentaje de mujeres → $100\ \% \cdot \frac{54}{90} = 60\ \%$ | **Porcentaje de hombres** → $100\ \% - 60\ \% = 40\ \%$

   Por tanto, como el 60 % de 10 es 6 y el 40 % de 10 es 4, en la muestra debe haber 6 mujeres y 4 hombres.

2. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

   Se puede aplicar la regla de Laplace, ya que la probabilidad de elegir a cada individuo de la población es la misma (equiprobabilidad) y la población tiene una cantidad finita de integrantes (90).

3. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral corresponde a todas las muestras distintas de tamaño 10 que se pueden seleccionar con 90 trabajadores. Por lo tanto, su cardinalidad es $\#\Omega = C_{10}^{90}$.

4. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: seleccionar una muestra aleatoria de tamaño 10 que contenga 6 mujeres y 4 hombres.

   Su cardinalidad corresponde a la cantidad de muestras con tales características y se puede calcular como el producto entre la cantidad de muestras de tamaño 6 de entre 54 mujeres por la cantidad de muestras de tamaño 4 de entre 36 hombres. Por lo tanto, se cumple que $\#A = C_6^{54} \cdot C_4^{36}$.

5. Aplica la regla de Laplace para calcular $P(A)$. Usa una calculadora para determinar los números combinatorios.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_6^{54} \cdot C_4^{36}}{C_{10}^{90}} = \frac{25\,827\,165 \cdot 58\,905}{5\,720\,645\,481\,903} \approx 0{,}26594012$$

6. Responde.

   La probabilidad aproximada de que la muestra conserve la razón entre mujeres y hombres es 0,266.

- En el ejemplo anterior, ¿creen que sería importante que la muestra conservara la razón entre las cantidades de mujeres y hombres de la población?, ¿por qué? Reflexionen y compartan su respuesta con el curso.

BDA U4_ACT_25 U4_IMA_3

Como puedes ver, las técnicas de conteo pueden facilitar la comprensión de muchos fenómenos sociales, permitiendo tomar decisiones informadas y muchas veces acertadas.

Ejemplo 2

Supón que en el Ejemplo 1 la oficina de estudios públicos decidió obtener la muestra manteniendo la razón entre las cantidades de mujeres y hombres, de modo que seleccionará al azar y sin reemplazo a 6 de las mujeres y a 4 de los hombres.

Claudia es una de las 90 trabajadoras de la empresa multinacional. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las seleccionadas en la muestra?

1. Interpreta la situación.

   Como la cantidad total de hombres es fija (36) y el número de hombres que serán seleccionados en la muestra también (4), estas cantidades no influirán en la determinación de la probabilidad de que Claudia sea incluida en la muestra.

2. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

   Se puede aplicar la regla de Laplace, ya que la probabilidad de elegir a cada una de las mujeres de la muestra es la misma (existe equiprobabilidad) y la población considerada tiene una cantidad finita de mujeres (54).

3. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral Ω está constituido por las combinaciones de 6 elementos que se pueden hacer a partir de 54 elementos. Por lo tanto, su cardinalidad es $\#\Omega = C_6^{54}$.

4. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: Claudia está en la muestra.

   Los casos favorables al evento A corresponden a todas las posibles muestras en que Claudia es una de las 6 mujeres seleccionadas, es decir, a la cantidad de combinaciones de 5 mujeres que se pueden hacer a partir de las otras 53 mujeres. Entonces, se tiene que $\#A = C_5^{53}$.

5. Aplica la regla de Laplace y calcula la probabilidad $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_5^{53}}{C_6^{54}} = \frac{\dfrac{53!}{(53-5)!\cdot 5!}}{\dfrac{54!}{(54-6)!\cdot 6!}} = \frac{\dfrac{53!}{\cancel{48!}\cdot 5!}}{\dfrac{54!}{\cancel{48!}\cdot 6!}} = \frac{53!\cdot 6!}{54!\cdot 5!} = \frac{\cancel{53!}\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{54\cdot \cancel{53!}\cdot \cancel{5!}} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$$

6. Responde.

   La probabilidad de que Claudia sea seleccionada en la muestra es $\frac{1}{9}$.

- ¿Por qué no se consideró la cantidad de hombres en el cálculo anterior?, ¿hubiera sido otro el resultado? Explica a tu curso.
- ¿De qué otra manera podrías calcular la probabilidad $P(A)$ en el **Ejemplo 2**? Analiza la situación y explica a tu curso otra forma de resolver el problema.
- ¿Cómo podrían describir el razonamiento para calcular la cardinalidad del evento A en el **Ejemplo 2**? Expongan por turnos una posible explicación y ejemplifiquen.

EJEMPLO 3

En un edificio público se realiza una encuesta de satisfacción para usuarios con movilidad reducida que han acudido a él.
La encuesta consiste en solicitar a las personas que lean la tarjeta que se muestra en la imagen y que elijan una de las opciones que se ofrecen.

Si 20 personas han participado en la encuesta, ¿cuál es la probabilidad de que 10 de ellas hayan elegido la opción Muy satisfecho/a (MS), 5 la opción Satisfecho/a (SA), 3 la opción Insatisfecho/a (IN) y 2 la opción Muy insatisfecho/a (MI)?

¿Cuál es su nivel de satisfacción en cuanto al acceso a nuestro edificio y a su infraestructura?

Muy satisfecho/a (**MS**)
Satisfecho/a (**SA**)
Insatisfecho/a (**IN**)
Muy insatisfecho/a (**MI**)

1. Verifica que se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace.

   Como no existe información adicional, puede suponerse que la probabilidad de seleccionar una u otra opción es la misma (existe equiprobabilidad). Además, dado que se pueden determinar la cantidad de personas que han participado en la encuesta y el número de opciones que se pueden seleccionar, se puede aplicar la regla de Laplace.

2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral Ω está constituido por todas las posibles opciones que han elegido las 20 personas que han respondido la encuesta. Como cada persona tiene 4 opciones de respuesta, aplicando el principio multiplicativo, la cardinalidad del espacio muestral es la siguiente:

   $$\#\Omega = 4^{20} = 1\,099\,511\,627\,776$$

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: que de los 20 encuestados, 10 hayan seleccionado MS, 5 SA, 3 IN y 2 MI.

   Los casos favorables al evento A pueden determinarse a partir de la permutación de los siguientes 20 elementos, que corresponden a las respuestas de los encuestados:

   MS MS MS MS MS MS MS MS MS MS SA SA SA SA SA IN IN IN MI MI

   Como el elemento MS se repite 10 veces, el SA 5 veces, el IN 3 veces y el MI 2 veces, podemos calcular la cardinalidad del evento A utilizando la siguiente permutación con repetición:

   $$\#A = PR_{20}^{10,\,5,\,3,\,2} = \frac{20!}{10! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!} = 465\,585\,120$$

4. Aplica la regla de Laplace y calcula la probabilidad $P(A)$.

   $$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{PR_{20}^{10,\,5,\,3,\,2}}{4^{20}} = \frac{465\,585\,120}{1\,099\,511\,627\,776} \approx 0{,}00042345$$

5. Responde.

   La probabilidad aproximada de que de las 20 personas encuestadas 10 hayan seleccionado MS, 5 SA, 3 IN y 2 MI es 0,00042345.

- En la situación anterior, si se preguntara por la probabilidad de que de las 20 personas encuestadas 2 hayan seleccionado MS, 3 SA, 5 IN y 10 MI, ¿se obtendría el mismo valor que el que se calculó o uno diferente?, ¿por qué? Explica.

BDA U4_ACT_26

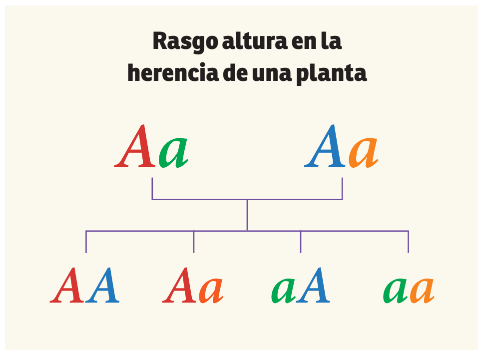
EJEMPLO 4 » Conecta con **Biología**.

Como has estudiado en **Biología**, los principios básico de los procesos de herencia genética en plantas y animales fueron propuestos por Mendel.

El genetista y naturalista austriaco Gregor Mendel (1822-1884) estudió algunos rasgos de la herencia en diversas plantas que observaba en su jardín-laboratorio. Por ejemplo, consideremos que la altura de una planta depende de un gen formado por dos características: una dominante A, que provoca que tenga una altura normal, y una recesiva a, que provoca que sea enana.

Cada una de las características que componen un gen provienen de uno de los progenitores. Como la característica A es dominante, las combinaciones AA y Aa producen una planta de estatura normal, mientras que la combinación aa genera una planta enana. Observa que los genes Aa y aA son el mismo, ya que no es relevante el orden en que se presentan las características en él.

Supón que se cruzan dos plantas, ambas con el gen Aa, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la probabilidad de que un descendiente sea una planta enana?



1. Interpreta la situación.

   Cada progenitor posee el mismo gen Aa. Se deben determinar todas las posibilidades genéticas para sus herederos y calcular la probabilidad de obtener el gen aa que determinará que el descendiente sea una planta enana.

2. Representa la cantidad de resultados posibles.

   Se deben representar los resultados considerando que el descendiente establece su gen para la altura heredando una característica de cada progenitor. Como se puede observar a continuación, existen 2 posibilidades para cada característica:

Característica heredada del progenitor 1	Característica heredada del progenitor 2
2 (A o a)	2 (A o a)

3. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   Aplicando el principio multiplicativo, la cantidad de casos totales es $\#\Omega = 2 \cdot 2 = 4$.

4. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es N: heredar el gen aa.

   Como los genes AA, Aa y aA determinan una estatura normal y solo el gen aa determina enanismo, la cantidad de casos favorables al evento N es $\#N = 1$.

5. Aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad $P(N)$ de que un descendiente sea una planta enana.

$$P(N) = \frac{\#N}{\#\Omega} = \frac{1}{4}$$

6. Responde.

   La probabilidad de que un descendiente sea una planta enana es $\frac{1}{4}$.

- En la situación anterior, ¿se cumplen las condiciones para aplicar la regla de Laplace? Explica por qué.

Ejemplo 5

Supón que la altura de una planta, su color y su textura son rasgos que pueden describirse a partir de la teoría de la herencia de Mendel. En la imagen se muestran estos rasgos y los genes que los determinan, además de la condición de dominante o recesivo de cada característica heredada de los progenitores.

Supón que se cruzan dos plantas, una con los genes $AaCCtt$ y otra con los genes $AaCcTt$. ¿Cuál es la probabilidad de que un descendiente sea una planta enana, de color verde y de textura rugosa? Considera que los tres rasgos son independientes entre sí.

1. Interpreta la situación.

   Un progenitor posee el gen $AaCCtt$ y el otro, el gen $AaCcTt$. Se deben determinar todas las posibilidades genéticas para sus herederos y calcular la probabilidad de que un descendiente tenga el gen aa para la altura, los genes CC, Cc o cC para el color y el gen tt para la textura.

2. Representa la cantidad de resultados posibles.

   Se pueden representar los resultados considerando que el descendiente establece cada uno de sus genes heredando una característica de cada progenitor. Como se puede observar a continuación, existen 2 posibilidades para cada característica:

Altura		Color		Textura	
Progenitor 1	Progenitor 2	Progenitor 1	Progenitor 2	Progenitor 1	Progenitor 2
2	2	2	2	2	2

3. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   Aplicando el principio multiplicativo, la cantidad de casos totales es $\#\Omega = 2^6 = 64$.

4. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es N: que un descendiente sea una planta enana, verde y rugosa.

Altura

Como la característica que determina este rasgo es recesiva y los genes de los progenitores son Aa y Aa, solo hay 1 opción que lo determina (aa).

Color

Como la característica que determina este rasgo es dominante y los genes de los progenitores son CC y Cc, hay 4 opciones que lo determinan (CC, Cc, CC y Cc).

Textura

Como la característica que determina este rasgo es recesiva y los genes de los progenitores son tt y Tt, hay 2 opciones que lo determinan (tt y tt).

De acuerdo con lo anterior y aplicando el principio multiplicativo, la cantidad de casos favorables al evento N es $\#N = 1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$.

5. Aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad $P(N)$ de que un descendiente sea una planta enana, verde y rugosa, y responde.

$$P(N) = \frac{\#N}{\#\Omega} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

La probabilidad de que un descendiente sea una planta enana, verde y rugosa es $\frac{1}{8}$.

BDA U4_ACT_27

Ejemplo 6 » Educación ambiental.

El cambio climático es una variación que se está registrando en el clima de nuestro planeta atribuida, directa o indirectamente, a la actividad humana y que modifica la composición de la atmósfera. Se manifiesta en un aumento de las temperaturas medias y en una alteración del clima a escala mundial, aumentando la frecuencia de eventos climáticos extremos.

Fuente: Ministerio del Medio Ambiente de Chile. (s.f.). *¿Qué es el cambio climático?* http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_58

Según datos registrados en la Estación de Quinta Normal de la Dirección Meteorológica de Chile (disponibles en http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_59 y http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_60), en enero de 2000, 18 días superaron los 30 °C, mientras que en 2023 estos aumentaron a 20.

La sequía que acompaña al cambio climático favorece un aumento en la frecuencia de incendios forestales.

En concordancia con el Objetivo de Desarrollo Sustentable **ODS 13 Acción por el clima**, algunas medidas que puedes tomar para combatir el cambio climático son las siguientes:

- Ahorra energía en casa y en la escuela.
- Consume menos, reutiliza, repara y recicla.
- Come más verduras.
- Bota menos comida.
- Mantén limpio tu entorno.
- Expresa tu opinión.

Fuente: Organización de las Naciones Unidas. (s.f.). *Acciones por un planeta saludable.* http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_61

Utilizando los datos de 2023, se puede aproximar a 0,65 la probabilidad frecuencial de que en un día de enero se superen los 30 °C (20 de 31 días). Suponiendo que la temperatura máxima de un día es independiente de la de otro día, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente en 3 días hábiles de una semana de enero se registre una temperatura superior a 30 °C?

1. Interpreta la situación planteada y diseña una estrategia.

   Los días hábiles corresponden a 5 días de la semana (de lunes a viernes). Entonces, primero se calcula la cantidad de combinaciones de tamaño 3 que se pueden hacer a partir de 5 elementos. Luego, se determina la probabilidad de cada manera de tener 3 días con más de 30 °C de los 5 días hábiles de una semana. Finalmente, se aplica la regla aditiva de la probabilidad.

2. Calcula la cantidad de combinaciones de tamaño 3 que se pueden hacer con 5 elementos.

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

3. Determina la probabilidad de cada manera en que en 3 de los 5 días se registran más de 30 °C.

   Como se asume que las probabilidades son independientes, su producto determina la probabilidad de cada manera de cumplir el requerimiento del enunciado.

$$0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot (1-0{,}65) \cdot (1-0{,}65) = 0{,}65^3 \cdot (1-0{,}65)^2 = 0{,}65^3 \cdot 0{,}35^2 \approx 0{,}034$$

4. Aplica la regla aditiva de la probabilidad.

   El evento estudiado puede ocurrir de 10 maneras distintas, por lo tanto, se suman las probabilidades.

$$0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 + 0{,}034 = 10 \cdot 0{,}034 = 0{,}34$$

5. Responde.

   La probabilidad aproximada de que exactamente en 3 días hábiles de una semana de enero se registre una temperatura superior a 30 °C es 0,34.

Puedes acceder a una calculadora que te permitirá aplicar las técnicas de conteo que has aprendido (permutaciones y combinaciones) en forma sencilla y práctica para resolver problemas de probabilidades.

Calculadora combinatoria *online*
http://www.enlacesantillana.cl/#/L25_MAT2MTEU4_62

Ejemplo 7

Considera un juego en que se extraen al azar 5 bolitas numeradas de 1 a 5, una por una y sin devolución, desde una tómbola. En la medida que se van sacando, se va formando un número de 5 cifras de izquierda a derecha, es decir, el dígito de la primera bolita extraída va en la posición de las decenas de mil; el de la segunda, en la de las unidades de mil, y así sucesivamente.

¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea par? Usa la calculadora *online* sugerida.

1. Analiza la situación e identifica si se puede modelar mediante una permutación o una combinación.

   Como el orden en que se extraen las bolitas sí importa, se pueden utilizar permutaciones.

2. Define el espacio muestral y calcula la cantidad total de elementos que posee.

   El espacio muestral corresponde a todos los números que se pueden formar permutando los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5. Por lo tanto, se ingresa el valor 5 en el ítem 2 de la calculadora, como se muestra en la **Captura 1**.

3. Define el evento de interés y calcula la cantidad de casos favorables a él.

   El evento es A: formar un número par. Este evento puede ocurrir de dos maneras: que el número termine en 2 o que lo haga en 4. La cantidad de casos favorables a cada evento corresponde a la cantidad de permutaciones que se pueden hacer con cuatro elementos, ya que en el primer caso el dígito 2 está fijo y en el otro, el dígito 4 está fijo. Por lo tanto, se ingresa el valor 4 en la calculadora, como se muestra en la **Captura 2**.

4. Aplica la regla de Laplace para calcular $P(A)$ y responde.

$$P(A) = \frac{24 + 24}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

La probabilidad de que el número formado sea par es 0,4.

Captura 1

Captura 2

Para finalizar la **Lección 2**...

- ¿Cómo se relacionan los contenidos de esta lección con los de la lección anterior?
- ¿Cómo verificas si puedes aplicar la regla de Laplace en una situación dada?
- ¿Qué beneficios puede traer el respeto y reconocimiento de las ideas distintas a las tuyas?, ¿por qué?
- Los modelos aplicados en la lección, ¿te ayudaron a resolver los problemas propuestos?, ¿por qué?
- ¿Sentiste confianza y tuviste una actitud positiva durante el desarrollo de las actividades de esta lección?, ¿por qué?
- ¿Crees que poseer datos cuantitativos de una situación ayudan a comprenderla mejor?, ¿en qué situaciones podrían ayudarte a ti?

BDA U4_ACT_28 a 31

Síntesis de Unidad 4 • Probabilidad y estadística

Lección 1 • Técnicas de conteo

Aprendiste...

Permutaciones y variaciones

- **Principio multiplicativo.**

  Si un evento puede ocurrir de n_1 maneras distintas, otro evento de n_2 formas distintas y así sucesivamente, con k eventos diferentes, el número total de formas distintas en que pueden ocurrir estos eventos simultáneamente es $n_1 \bullet n_2 \bullet \ldots \bullet n_k$.

- **Permutaciones simples.**

  La cantidad P_n de permutaciones distintas de n elementos que se pueden hacer con n elementos diferentes (con $n \in \mathbb{N}$) es $P_n = n! = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \ \ldots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$.

- **Variaciones.**

  La cantidad V_n^m de variaciones distintas de m elementos que se pueden hacer con n elementos diferentes (con m, $n \in \mathbb{N}$ y $n > m$) es $V_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

- **Permutaciones circulares.**

  La cantidad PC_n de permutaciones circulares distintas de n elementos que se pueden hacer con n elementos diferentes (para $n \in \mathbb{N}$) es $PC_n = P_{(n-1)} = (n-1)!$.

- **Permutaciones con repetición.**

  Cuando en un conjunto de n elementos (con $n \in \mathbb{N}$) uno de ellos se repite n_1 veces, otro n_2 veces, otro n_3 veces (con $n_1, n_2, n_3 \ldots \in \mathbb{N}$), y así sucesivamente, tal que $n = n_1 + n_2 + n_3 \ldots$, la cantidad $P_n^{n_1, n_2, n_3 \cdots}$ de **permutaciones con repetición** distintas que se pueden formar es $P_n^{n_1, n_2, n_3 \cdots} = \dfrac{n!}{n_1! \bullet n_2! \bullet n_3! \ldots}$.

Combinaciones

- **Combinaciones simples.**

  La cantidad C_k^n de combinaciones distintas de k elementos que se pueden hacer con n elementos diferentes (con k, $n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$) es $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)! \bullet k!}$.

- **Combinaciones con repetición.**

  La cantidad CR_k^n de **combinaciones con repetición** de k elementos de un conjunto con n elementos (con k, $n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$) es

  $$CR_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \bullet k!}.$$

Cuando buscas información en internet, ¿de qué manera compruebas que sea verídica y cómo evalúas si respeta la propiedad y la privacidad de las personas?

Lograste...

- Favorecer el desarrollo personal, valorando la vida en todos sus ámbitos.
- Reconocer la igualdad de derechos entre mujeres y hombres en distintos ámbitos de la sociedad.
- Reconocer el diálogo como fuente de superación de diferencias.

¿En qué ámbitos piensas que aún no existe un trato igualitario para hombres y mujeres?

Además del diálogo, ¿qué más hace falta para resolver diferencias entre las personas?

Aplicaste...

- Simplificaciones para poder resolver problemas.
- La elección de parámetros para acercar modelos a la realidad.
- Estrategias para realizar demostraciones simples de resultados.

Lección 2 • Cálculo de probabilidades

» Aprendiste...

Probabilidades y azar

- **Regla de Laplace.**

La **regla de Laplace** permite calcular la probabilidad de un evento A cuando es posible contar todos los resultados posibles del experimento aleatorio (o espacio muestral, que se simboliza como Ω) y, además, cada resultado se puede asumir como equiprobable. Para un experimento aleatorio de estas características (con $\#\Omega \neq 0$), la probabilidad de A se denota $P(A)$ y corresponde al cociente entre los casos favorables al evento A y la cantidad de casos totales.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

en que A es un evento de un experimento aleatorio y Ω es su espacio muestral.

Probabilidades en la sociedad

El uso de **permutaciones, variaciones y combinaciones** facilita la resolución de problemas relacionados con el **cálculo de probabilidades** (aplicando la regla de Laplace) en ámbitos sociales variados.

¿Qué fortalezas identificaste en ti relacionadas con el interés y la perseverancia que se requieren para resolver problemas?

» Lograste...

- Resolver problemas de manera reflexiva, utilizando modelos y rutinas.
- Comunicar y expresar información a tu entorno educativo y social de diversas formas.
- Trabajar en equipo de forma responsable, construyendo relaciones basadas en la confianza mutua.

¿De qué manera piensas que es más eficiente comunicar información a muchas personas a la vez?

¿Qué ejemplo puedes dar de un comportamiento responsable durante el trabajo en equipo?, ¿y de uno no responsable?

» Aplicaste...

- La descomposición de problemas en subproblemas para poder resolverlos.
- Modelos para resolver problemas.
- Representaciones como analogías y situaciones familiares para resolver problemas.

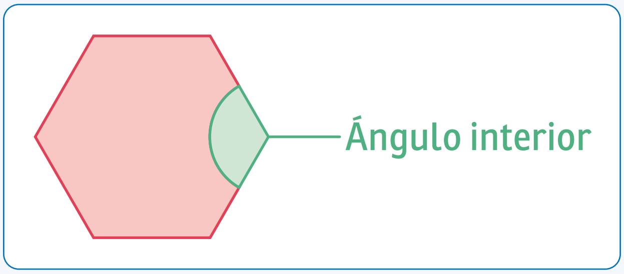
BDA U4_ACT_32 y 33

Glosario

A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje X en el plano cartesiano.

Ángulo interior: es el formado por dos lados contiguos de un polígono y se encuentra dentro de este.



Área: medida de la extensión de una superficie.

B

Base de una potencia: corresponde al factor que se repite en una potencia.

C

Círculo: región o área del plano delimitada por una circunferencia.

Circunferencia: es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia r de un punto O.

Coeficiente numérico: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cono: es una figura tridimensional que se forma al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Cuerda: segmento trazado entre dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

D

Diámetro: cuerda de mayor longitud en una circunferencia.

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo se cumple para algunos valores de la incógnita.

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento: subconjunto del espacio muestral.

Experimento aleatorio: experimento en el que no se tiene certeza de lo que pasará. Por lo tanto, no se puede predecir su resultado.

Exponente: término de una potencia que indica cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Expresión algebraica: agrupación de términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición y/o sustracción.

F

Factor literal: parte no numérica de un término algebraico.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

Frecuencia relativa: razón entre la frecuencia absoluta y la cantidad total de datos de la muestra o población.

M

Muestra: subconjunto de la población a partir de la cual se pretende realizar inferencias para dicha población.

N

Número decimal: número formado por una parte entera y una parte decimal separada por una coma decimal.

Números racionales ($\mathbb{Q}$): conjunto numérico formado por todos los números que se pueden escribir como una fracción, en la cual el numerador y el denominador son números enteros ($\mathbb{Z}$). Además, el denominador debe ser distinto de cero.

Números reales ($\mathbb{R}$): conjunto numérico formado por la unión de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y los números irracionales ($\mathbb{Q}^*$).

O

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical o eje Y en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes del plano cartesiano. Se representa con el punto (0, 0).

P

Par ordenado: en el plano cartesiano, corresponde a una dupla de elementos, el primero indica la abscisa y el segundo la ordenada.

Pi (π): número irracional que corresponde a la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia.

Plano cartesiano: es el plano euclidiano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares que determinan cada punto en el plano.

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se quiere estudiar una o varias características.

Porcentaje: razón cuyo consecuente es 100. Se representa por el símbolo %.

Potencia: expresión usada para indicar la multiplicación de un factor por sí mismo una determinada cantidad de veces.

Probabilidad: posibilidad de ocurrencia de un evento. Toma valores entre 0 y 1. También se puede expresar como porcentaje.

Proporción: igualdad de dos razones.

R

Radio: segmento que une el centro de una circunferencia con cualquier punto de ella.

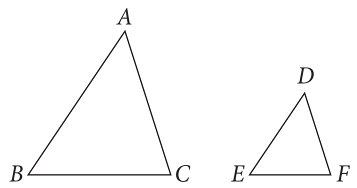
Razón: comparación de dos números mediante el cociente entre ellos.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento, determinando el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles en un experimento aleatorio, cuando sus resultados son equiprobables.

S

Semejanza (~): relación en que dos figuras tienen la misma forma, las medidas de sus lados correspondientes mantienen la misma proporción y las medidas de los ángulos correspondientes son iguales.

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$



T

Término algebraico: cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

V

Vector: segmento de recta orientado, determinado por su origen y su extremo. Se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido.

Volumen: medida del espacio que ocupa un cuerpo.

Sitios web

- *https://www.mineduc.cl*
- *https://www.curriculumnacional.cl/portal/*
- *https://www.geogebra.org/classic?lang=es*
- *https://www.educ.ar/recursos/158983/sistema-braille*
- *http://www.minsal.cl*
- *https://www.conicyt.cl/*
- *https://www.energia.gob.cl/*
- *https://www.who.int/es*
- *https://www.monumentos.gob.cl/*
- *https://www.mnhn.gob.cl/*
- *https://www.paho.org/es*
- *https://uchile.cl/*
- *https://www.ine.gob.cl/*
- *https://www.nasa.gov/*
- *https://cambioclimatico.mma.gob.cl/*
- *https://precolombino.cl/wp/culturas-americanas/pueblos-originarios-de-chile/*
- *http://www.csn.uchile.cl/*
- *https://www.inmujeres.gob.es/*
- *https://www.ncbi.nlm.nih.gov/*
- *https://injuv.gob.cl/*
- *https://www.unicef.org/chile/*
- *http://intef.es/*
- *https://www.unam.mx/*
- *https://www.conaf.cl/*
- *https://www.minciencia.gob.cl/*
- *https://es.symbolab.com/*
- *http://www.estadioseguro.gob.cl/*
- *https://escenarioshidricos.cl/*
- *https://www.adesup.cl/*

Bibliografía

- Busch, B. y Watson, E. (2023). *La ciencia del aprendizaje: 77 estudios que todo docente debe conocer*. México: Trillas.
- Gardner, H. (2017). *Inteligencias múltiples*. (2da ed. ampliada y revisada). Paidós.
- Larson, R. y Hostetler, R. (2018). *Precálculo*. (Edicion e-book). Barcelona: Editorial Reverté S. A.
- Martínez, C. (2019). *Estadística básica aplicada*. Bogota: Ecoe Ediciones.
- Mineduc (2017). *Orientaciones para la apropiación de las Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago: Mineduc.
- Mineduc (2023). *Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes*. Educación Básica y Media por asignatura. Mineduc.
- Mineduc (2023). *Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes*. Orientaciones Generales. Mineduc.
- Mineduc (2023). *Objetivos de Aprendizaje Priorizados: Visualización en los Textos Escolares de Matemátic*a. Mineduc.
- Mineduc (2023). *Orientaciones didácticas*: Matemática. Mineduc.
- Mineduc (2023). *Plan de Reactivación Educativa*. Santiago: Mineduc.
- Quigley, A. (2022). *El docente tutor: desarrolla hábitos exitosos para la enseñanza*. México: Trillas.
- Ross, S. (2018). *Introducción a la Estadística*. (Edición e-book). Barcelona: Editorial Reverté S. A.
- Sharples, M. (2022) *Pedagogía práctica: nuevas formas de enseñar y aprender* . México: Trillas.
- Tovar, M. (2020). *Habilidades socioemocionales: por qué, para qué y cómo*. México: Trillas.

Anexo

Solucionario de las preguntas del Texto del Estudiante

Unidad 1 • Números

Página 7

1. $v_o^2 \approx \frac{GM}{r}$

2. Respuesta variada. Por ejemplo, permitirá controlar el desarrollo territorial, la planificación urbana y la conservación de la naturaleza.

Habilidades del siglo XXI

- Como $\sqrt{4} = 2$, el valor de v_o se duplicaría.
- Como $\sqrt{9} = 3$, el valor de v_o se reduciría a la tercera parte.

Conocimientos previos

- Respuesta variada. Por ejemplo, las raíces cuadradas de números naturales.

Lección 1 • Números reales ($\mathbb{R}$)

Números reales en el entorno

Página 8

- Respuesta variada. Por ejemplo, que su conformación es diferente a la de los números racionales.
- Respuesta variada. Por ejemplo, que un número racional tiene una cantidad finita o infinita periódica de cifras decimales, mientras que los irracionales tienen una cantidad infinita aperiódica de cifras decimales.
- Respuesta variada. Por ejemplo, en estructuras de la naturaleza como plantas y flores y en estructuras arquitectónicas como el Partenón griego.
- Respuesta variada. Por ejemplo, para evitar adulteraciones y suplantación de identidad.

Página 9

- Es un número decimal periódico. Por lo tanto, sí es posible representarlo como fracción.
- El 0 es un número racional, ya que se puede escribir como el cociente de dos números enteros (cuyo divisor es distinto de 0). Por ejemplo, $0 = \frac{0}{2}$.
- Se obtuvo un número racional porque las medidas de la cédula que se utilizan para su cálculo son racionales.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ya que sus valores aproximados a la décima coinciden.

Página 11

- Es un número irracional, ya que es un número decimal que no tiene un período establecido.

Raíces

Página 12

- Tiene 4 caras rectangulares y 2 caras cuadradas.
- Corresponden a números racionales.
- Corresponden a números irracionales, ya que son la raíz cuadrada de la suma de las longitudes de los lados al cuadrado que forman un triángulo rectángulo.

- Respuesta variada. Por ejemplo, a través de la recopilación de información puede desarrollar modelos predictivos que permitan anticipar algunas catástrofes o cambios en el clima.

Página 13

- Respuesta variada. Por ejemplo, podría dibujar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 85 mm y 55 mm y, con una regla, verificar que la hipotenusa mide, aproximadamente, $\sqrt{10\,250} \approx 101$ mm.
- El valor es 101,24228365…, el cual corresponde a un número irracional, ya que no tiene un período definido.
- Tienen raíz cuadrada exacta los siguientes números: 1, 4 y 9.

Página 14

- Respuesta variada. Por ejemplo, se puede expresar en metros cúbicos, centímetros cúbicos, litros, etc.
- El valor es 63,58891794… y corresponde a un número irracional, ya que no tiene un período definido.
- Tienen raíz cúbica exacta los siguientes números: 1 y 8.
- La raíz cúbica de un número real es siempre real, ya que cuando se calcula la raíz cúbica de un número negativo, existe un número que multiplicado por sí mismo tres veces da como resultado un número negativo; mientras que cuando se desea calcular la raíz cuadrada de un número negativo, no existe un número real que multiplicado por sí mismo dos veces dé como resultado un número negativo.

Página 15

- Porque no existe un número (negativo o positivo) que elevado a 10 dé como resultado un número negativo. Para que su valor sea real, la expresión podría ser $\sqrt[10]{100}$.

Página 16

- Por ejemplo, se utilizó la propiedad del producto de potencias de igual exponente.
- La conjetura no siempre es verdadera. Respuesta variada: por ejemplo, si se modifica el primer número a $\sqrt{1\,850}$, entonces, el resultado de la multiplicación es otro número irracional.

Página 17

- Como el índice de las raíces es 3, entonces, se deben buscar los números que elevados a 3 den como resultado 8 y 27, los cuales serían 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, $\sqrt[3]{216} = 2 \cdot 3 = 6$.
- La primera expresión es incorrecta, porque al ingresar el factor a la raíz, este no se encuentra escrito como potencia con exponente 2. La expresión corregida sería $2\sqrt{10} = \sqrt{10 \cdot 2^2} = \sqrt{10 \cdot 4} = \sqrt{40}$. La segunda expresión es correcta.

Página 18

- Respuesta variada. Por ejemplo, los pasos son los siguientes: expresar la medida de la diagonal utilizando el teorema de Pitágoras, aplicar la propiedad «raíz elevada a su índice», calcular la medida de la diagonal en centímetros, calcular la medida de la diagonal en pulgadas y responder la pregunta.

Página 19

- Aplicando la potencia de una potencia, se obtiene lo siguiente:

$$\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

- Las raíces tienen el mismo valor, ya que la cantidad subradical es la misma y el resultado de la multiplicación de los índices es el mismo, independiente del orden.
- Respuesta variada. Por ejemplo, hay confusión en el orden para presionar los botones, lo cual genera error en el cálculo.

Página 20

- En la adición y sustracción de raíces, dos términos son semejantes si tienen exactamente las mismas raíces, es decir, tienen igual índice e igual cantidad subradical.
- Se identifican y agrupan los términos semejantes (o raíces de igual índice e igual cantidad subradical) usando paréntesis. Luego, se suman o restan los factores que multiplican los términos semejantes, manteniendo estos últimos constantes.

Página 21

- Se aplicaron: el producto de raíces cuadradas y la raíz cuadrada elevada a su índice.
- Ambas fracciones son equivalentes, ya que la segunda es el resultado de amplificar la primera por una fracción cuyo valor es 1.
- Es más sencillo resolver $\frac{2\sqrt{5}}{15}+\frac{2}{15}$, ya que es más simple calcular el mínimo común múltiplo para los denominadores que son números naturales.

Página 22

- Ambos valores son iguales y representan al número decimal 0,903481218…
- Se deberían aplicar dos propiedades de las raíces:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{3^7} &= \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^3}\\ &= \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^3} \longrightarrow \text{aplicar la raíz enésima de un producto.}\\ &= 3 \cdot \sqrt[4]{3^3} \longrightarrow \text{aplicar la raíz elevada a su índice.}\end{aligned}$$

Página 23

- Se puede utilizar una calculadora científica para calcular el valor de cada fracción y corroborar que el resultado obtenido es el mismo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, no conocía ninguna de las estrategias para racionalizar. Es importante racionalizar el denominador de una fracción, ya que nos permite poder calcular de forma simple una adición o sustracción de fracciones y, también, ubicar en la recta numérica dicha fracción.

Aproximación y representación de números reales

Página 24

- Respuesta variada. Por ejemplo, la aguja cruzó 63 veces alguna de las líneas.
- Respuesta variada. Por ejemplo, el valor es 3,17460317.

Página 25

- Es necesario, ya que el concepto de distancia se relaciona con un numero positivo, por lo tanto, se debe considerar el valor absoluto del número y no su signo.

Página 27

- Es mayor $\sqrt{18}$, es decir, $\sqrt{18} > \sqrt{15}$, ya que se cumple que $18 > 15$.

Operaciones con números reales

Página 28

- Corresponde a un número irracional, ya que para el cálculo del área se utiliza el número irracional π.
- Calculando el área que abarca cada sensor y luego sumándolas para obtener el área total.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ya que puede identificar más rápido los peligros a que se enfrentan los bosques.

- Respuesta variada. Por ejemplo, ayuda a mantener una mejor calidad del aire y el ecosistema de distintas especies de animales.
- Respuesta variada. Por ejemplo, además de estos beneficios, también generan suelos fértiles y mantienen limpios los ríos.

Página 29

- Se identifican y agrupan los términos semejantes para posteriormente sumar o restar los coeficientes que acompañan a estos términos.
- Los valores son 10,2101761… y 3,92699081…, respectivamente.
- - Sí, se puede dar ese resultado. Por ejemplo:

$$\frac{\pi}{2} + \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) = 3$$

  - No se puede dar este resultado, ya que los números racionales se pueden expresar como fracciones y al sumar dos fracciones, tanto el numerador como el denominador de la fracción resultado son números enteros. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{8+9}{24} = \frac{17}{24}$$

Página 31

- Respuesta variada. Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{100}{5}} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

- Respuesta variada. Por ejemplo, reemplazaría $t = 3$ en la fórmula y obtendría lo siguiente:

$$3 = \sqrt{\frac{h}{5}}$$
$$3^2 = \frac{h}{5}$$
$$9 = \frac{h}{5}$$
$$45 = h$$

  La altura desde la que se dejó caer la piedra es 45 m.

Para finalizar la Lección 1

- Respuesta variada. Por ejemplo, sí lo comprendí.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí porque es necesario para realiza el desarrollo de los ejercicios.
- Respuesta variada. Por ejemplo, significa participar y aportar en el trabajo para lograr un buen resultado.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ya que aporté y compartí mis conocimientos con mis compañeros.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí fueron importantes, porque encontré entretenida esta lección.
- Respuesta variada. Por ejemplo, han influido positivamente, ya que me permiten, por ejemplo, saber cuál será la temperatura en mi ciudad.

Lección 2 • Potencias, raíces y logaritmos

Potencias y raíces

Página 32

- La expresión a^3.
- La expresión $\sqrt[3]{V}$.
- Respuesta variada. Por ejemplo: por su dureza y resistencia al desgaste.

Página 33

- Es un numero irracional.
- La potencia equivalente es $b^{\frac{1}{n}}$.
- Se obtiene la potencia $45^{\frac{2}{6}}$, la cual tiene el mismo valor que la potencia original. La generalización de amplificar por r el exponente racional de una potencia $a^{\frac{p}{q}}$ corresponde a $a^{\frac{pr}{qr}} = \sqrt[qr]{a^{pr}}$, en que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ y $r \neq 1$ (si q es par, entonces, $a^p > 0$).

Página 34

- Respuesta variada. Por ejemplo, me resulta más simple multiplicar y dividir potencias de exponente racional, ya que se aplican directamente las propiedades, sin necesidad de escribir estas potencias como raíces para luego realizar las operaciones.

Página 35

- La ubicación prácticamente no cambiaría, ya que habría diferencias solo en la cifra de los centésimos.

Logaritmos

Página 36

- Un tablero de ajedrez tiene forma cuadrada, con 64 casillas en total.
- En total habría 128 granos de arroz en el tablero.
- En la casilla 7 habría que colocar 64 granos de arroz.
- Respuesta variada. Por ejemplo, hay 100 granos de arroz que se desea repartir equitativamente en las casillas, y todas ellas deben tener mínimo 1 grano. ¿Cuántas casillas quedarían con 2 granos?

Página 37

- En la casilla 24 habrá 8 388 608 granos de trigo.

Página 38

- Los resultados son 4, 0 y 0,69897… El resultado es 0 para log 1. Un logaritmo de base negativa no está definido. El valor de un logaritmo es negativo si el argumento es menor que 1.
- El argumento será positivo, ya que la base es un número positivo, por lo tanto, independiente del valor al cual se eleve la base, el resultado siempre es positivo.
- Para la comprobación, se puede calcular el logaritmo decimal usando una calculadora o también, calculando 10^3 y corroborando que el resultado es 1 000.
- La regla que afirma Martina es correcta. Por lo tanto, log 100 000 000 = 8.

Página 39

- El argumento debe ser el resultado exacto de la base elevada a un exponente que sea un número entero.

Página 40

- $\log_b 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$

  $\log_b b = 1 \Leftrightarrow b^1 = b$

  $\log_b b^n = n \Leftrightarrow b^n = b^n$

- A partir de la definición de logaritmo, se debe obtener la siguiente igualdad: $3^5 = 243$.

Página 41

- Se aplicó la propiedad del logaritmo de un cociente.

Página 42

- Se puede obtener la expresión escribiendo la raíz enésima como potencia: $\log_b \sqrt[n]{a} = \log_b a^{\frac{1}{n}}$.
- Aplicando el logaritmo de una potencia, se tiene lo siguiente:

$$\log_b a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_b a = \frac{\log_b a}{n}$$

Página 43

- Otra forma de calcular es la siguiente:

$$\log_4 8 = x \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Página 44

- Para la comprobación, se debe calcular el logaritmo usando una calculadora o, también, calcular 10^3 y corroborar que el resultado es 1 000, y calcular 4^5 y corroborar que el resultado es 1 024.
- Para entender las relaciones que hay entre estos conceptos y, además, para identificar y así poder usar el concepto adecuado para calcular lo que sea necesario.
- Si, se puede, ya que es posible aplicar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
&\log_{16} 2 = x\\
&\quad 16^x = 2 \ \leftarrow \text{ igualando las bases}\\
&\quad 2^{4x} = 2 \ \leftarrow \text{ igualando los exponentes}\\
&\quad 4x = 1\\
&\quad x = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, se cumple que:

$$\log_{16} 2 = \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \ 16^{\frac{1}{4}} = 2 \ \Leftrightarrow \ \sqrt[4]{16} = 2$$

Página 46

- El valor de la raíz es 0,50118723… ≈ 0,501.

Página 47

- $10^{26{,}2} = 10^{\frac{262}{10}} = 10^{\frac{131}{5}} = \sqrt[5]{10^{131}}$
- Primero se puede reemplazar $R = 8{,}8$ en la fórmula:

  $\log E = 1{,}5 \cdot 8{,}8 + 11{,}8$

  $\log E = 13{,}2 + 11{,}8$

  $\log E = 25$

Luego, determinar la energía como $E = 10^{25}$ y, finalmente, calcular el cociente:

$$\frac{10^{26,2}}{10^{25}} = 10^{26,2-25} = 10^{1,2} \approx 16$$

Entonces, el terremoto ocurrido frente a la costa de la Región de Ñuble generó casi 16 veces menos de energía que el de Valdivia.

Para finalizar la Lección 2

- Respuesta variada. Por ejemplo, me parecieron más difíciles los logaritmos; me falta repasar el cambio de base de un logaritmo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, en general, tuve complicaciones en activar las funciones de cálculo de raíces con índice mayor que 3.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ya que se aprende a ver los temas desde otro punto de vista, enriqueciendo la forma de pensar.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, porque considero que es importante compartir las ideas para intercambiar opiniones con mis compañeros.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, hubo un ambiente de respeto al momento que cualquier compañero estaba hablando.
- Respuesta variada. Por ejemplo, el robot de ajedrez, ya que es interesante que con el aprendizaje automatizado, el robot aprenda a jugar tan bien, aumentando cada vez más la probabilidad de ser invencible en una partida.

Síntesis de Unidad 1 • Números

Lección 1 • Números reales ($\mathbb{R}$)

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, se repartieron las tareas y se dieron instancias de diálogo reguladas mediante una pauta.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, identificando en qué parte de la tarea se debe obligatoriamente seguir instrucciones y en cuáles no es necesario; entonces, se debe ser original.
- Respuesta variada. Por ejemplo, al cuidar los espacios verdes se promueve el deporte y la práctica de deporte ayuda a que las personas cuiden su salud y mejoren su estado de ánimo.

Lección 2 • Potencias, raíces y logaritmos

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, la tolerancia a la frustración y el desarrollo de la curiosidad.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, las he utilizado para reforzar ciertos contenidos que no quedan claros. Son útiles, por ejemplo, para comprobar los resultados.
- Respuesta variada. Por ejemplo, exponer y fundamentar mis ideas me ayuda a promover la seguridad en mí mismo y a perder el miedo a cometer errores.

Unidad 2 • Álgebra y funciones

Página 51

1. Es una curva abierta formada por dos ramas simétricas respecto de un eje. Respuesta variada. Por ejemplo, sí, podría dibujarla. Se aprovecha la energía de mejor forma, porque los rayos solares se concentran en un único punto, permitiendo alcanzar temperaturas más altas y en menos tiempo.
2. Respuesta variada. Por ejemplo, se evita la adquisición de una cocina tradicional, se evita la utilización de energía eléctrica y de gas y se evita la contaminación.

Habilidades del siglo XXI

- Respuesta variada. Por ejemplo, en forma grupal, porque se repartirían las tareas, disminuyendo el tiempo de construcción y, además, se podría realizar un horno solar de mayor tamaño o más eficiente.
- Correspondería a la mitad de un círculo o a una media circunferencia, en la que todos los puntos de la línea curva están a la misma distancia de su centro.

Conocimientos previos

- Respuesta variada. Por ejemplo, necesito repasar las fórmulas de los productos notables.

Lección 1 • Función cuadrática

Ecuación cuadrática

Página 52

- Respuesta variada. Por ejemplo: energía eléctrica, energía solar, energía eólica, energía hidráulica y energía térmica.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, lo he observado y pienso que es una valiosa forma de aportar con el cuidado del medioambiente.
- Respuesta variada. Por ejemplo, se utiliza energía para cocinar, ver televisión, escuchar música, trabajar en el computador, calentar agua, entre otras.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, se malgasta energía, se podría realizar una campaña a través de un concurso entre equipos para hacerla más llamativa.

Página 54

- Se pueden reemplazar los valores en la ecuación y realizar el desarrollo, obteniendo que se cumple la igualdad. En este caso:

$$x = -4 \rightarrow 3 \cdot (-4)^2 - 48 = 0 \rightarrow 3 \cdot 16 - 48 = 0 \rightarrow 48 - 48 = 0$$

$$x = 4 \rightarrow 3 \cdot (4)^2 - 48 = 0 \rightarrow 3 \cdot 16 - 48 = 0 \rightarrow 48 - 48 = 0$$

- La ecuación no tiene soluciones reales, ya que se llega a la igualdad $x^2 = -16$.

Página 55

- Las soluciones de la primera ecuación son –2 y 9, y las de la segunda, 4 y 6.

Página 56

- Utilizando la calculadora de ecuaciones cuadráticas *online*, se comprueba que las soluciones son $\frac{1}{3}$ y 3.

Página 58

- Se cumple que $\Delta > 0$, porque el valor de la discriminante debe ser positivo para que existan dos soluciones reales.

Función cuadrática y su gráfica

Página 60

- Respuesta variada. Por ejemplo, se pueden trazar distintas parábolas.
- Respuesta variada. Por ejemplo, me gustaría realizar la prueba Titingi Mahute porque me interesa la moda y la confección de ropa ancestral del pueblo Rapa Nui.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, es una buena forma, ya que, para practicar dichos deportes, los estudiantes deben investigar y aprender de ellos, lo cual permite que se interioricen en el conocimiento de los pueblos originarios.

Página 61

- El lanzamiento real de la lanza está representado por el tramo en el cual los valores de x e y son números positivos. Por lo tanto, el tramo va de $x = 0$ a un valor de x levemente menor que 22.

Página 62

- Respuesta variada. Por ejemplo, no, porque la página cargó de inmediato y las instrucciones fueron claras.
- Respuesta variada. Por ejemplo, corresponde a una parábola que abre sus ramas hacia arriba, la cual alcanza un punto mínimo en (1, 1), pero no tiene puntos máximos. Los valores que puede asumir x son todos los números reales, mientras que los valores que puede tomar $f(x)$ corresponden a valores reales mayores o iguales que 1.

Página 63

- El coeficiente a es el que acompaña a x^2, independiente del orden en el que se presente la función. En el caso del ejemplo, el coeficiente a corresponde a 1.

Página 66

- La relación correcta es $\Delta > 0$, ya que la ecuación cuadrática asociada a la parábola tiene 2 soluciones reales. Por lo tanto, esta gráfica corta al eje X en 2 puntos.

Desplazamientos de la gráfica

Página 68

- Respuesta variada. Por ejemplo, la industria papelera, ya que realiza una sobreexplotación de los bosques, ocasionando la deforestación.
- Respuesta variada. Por ejemplo, utilizar como medio de transporte la bicicleta, apagar las luces cuando no se utilicen, reutilizar materiales y cosas como juguetes, ropa, etc.
- Respuesta variada. Por ejemplo, en la industria de la ropa, en el rubro de los muebles. Creo que el aporte es significativo, ya que ayuda a reducir al mínimo la generación de residuos y el uso descontrolado de materias primas naturales.

Página 69

- Ingresando las expresiones de las funciones en el *software* matemático se visualiza el desplazamiento de una gráfica respecto de la otra.

Página 71

- Para $a < -1$, la gráfica de g se contrae respecto de la de f. Para $-1 < a < 0$, la gráfica de g se dilata respecto de la de f.

Para finalizar la Lección 1

- Corresponde a una parábola.
- Permite encontrar los puntos del eje X en los cuales las ramas de la parábola lo cortan.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ya que asumí la responsabilidad de resolver los problemas planteados en el equipo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ayudó porque permitió realizar las gráficas de las funciones y, a partir de ellas, analizarlas para encontrar las respuestas.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí; en mi caso, utilizo la menor cantidad de papel impreso posible y reciclo la basura.
- Respuesta variada. Por ejemplo, la altura de un cuerpo que cae respecto al tiempo, la ganancia obtenida de acuerdo con la cantidad de artículos vendidos.

Lección 2 • Función inversa

Concepto de función inversa

Página 72

- Respuesta variada. Por ejemplo, la relación potencia - raíz.
- Respuesta variada. Por ejemplo: la araucaria, el litre, el espino, el alerce, etc. Algunos árboles foráneos: ciruelo de flor, robinia, araucaria brasileña, etc. Se genera un daño irreversible, ya que se produce un cambio climático y la desaparición de especies en peligro de extinción.

Página 73

- f

x	2	4	6	8
y	1	2	3	4

f^{-1}

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

Página 74

- A la salida se espera el número 3.

Página 75

- Para esto, se debe calcular $f(g(x)) = 3\left(\frac{x+7}{3}\right) - 7 = x + 7 - 7 = x$.
- Como se cumple que $f(g(x)) = x$, entonces, la función $f(x)$ es la inversa de $g(x)$.
- No todas las funciones tienen inversa, ya que hay algunas que para un elemento del conjunto no le corresponde un único elemento del otro conjunto.

Condiciones para que una función tenga inversa

Página 76

- Respuesta variada. Por ejemplo, corresponde a una regla entre dos conjuntos, de manera que a cada elemento de un conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto. Se puede relacionar con la tarifa telefónica o el valor de cierta cantidad de productos.
- Respuesta variada. Por ejemplo, diagrama sagital: representación que relaciona los elementos de dos conjuntos mediante flechas. Tabla de valores: tabla que muestra la relación entre los valores de la variable independiente y la variable dependiente. Representación gráfica: gráficos de las funciones realizados manualmente o usando un *software* computacional.
- El dominio es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x) y el recorrido es el conjunto de valores que toma la variable dependiente (y). Por ejemplo, la función cuadrática puede definirse con distintos dominios y recorridos.

Página 77

- Sí, sería una función inyectiva porque para cada elemento del dominio, habría una imagen distinta.
- Sí, sería una función inyectiva, porque para cada recta paralela al eje X, se intersecaría con la gráfica de f en un solo punto.

Página 78

- Para que la función sea epiyectiva, se debe sacar el elemento 8 del conjunto B.
- Se debería cambiar el recorrido por $y \leq -3$.

Página 79

- La función es invertible porque es una función biyectiva.
- Al ser la función f biyectiva, entonces, existe su función inversa f^{-1}, la cual cumple con ser una función inyectiva y epiyectiva, por lo tanto, su función inversa también es biyectiva.
- Las funciones reales descritas son biyectivas. Es correcto afirmar que las funciones lineales y afines son biyectivas, por lo tanto, son funciones invertibles (tienen funciones inversas).

Inversas de las funciones lineal, afín y cuadrática

Página 80

- La función del MRU corresponde a una función afín, mientras que la función del MRUA corresponde a una función cuadrática.
- El dominio y recorrido corresponden a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Página 81

- También correspondería a una función biyectiva, ya que cumple con ser inyectiva y epiyectiva.

Página 82

- El parámetro m corresponde a la pendiente, que sería $\frac{1}{7}$; mientras que el parámetro n corresponde a la ordenada al origen, que seria $-\frac{10}{7}$.
- La relación es la siguiente: si la función f (lineal o afín) tiene pendiente m y es invertible, entonces, la pendiente de su función inversa f^{-1} es $\frac{1}{m}$.

Página 84

- Todas las funciones cuadráticas no son invertibles, ya que no son funciones biyectivas.
- No sería una función epiyectiva porque existiría al menos una recta paralela al eje X que no se intersecaría en ningún punto con la gráfica de la función.
- Se debería considerar solo el conjunto de valores de x que representen una rama de la gráfica de la función cuadrática, es decir, se debería dividir la gráfica en dos tramos delimitados por el vértice y considerar solo uno de ellos como su dominio.

Página 86

- El valor de todas las expresiones es x, porque las funciones $f_1^{-1}(x)$ y $f_2^{-1}(x)$ son funciones inversas de $f(x)$.
- Es correcta la afirmación de Paz, porque se cumple que $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, y además, $\text{Dom}(f) = \text{Rec}(f^{-1})$ y $\text{Rec}(f) = \text{Dom}(f^{-1})$.

Página 87

Para finalizar la Lección 2

- Respuesta variada. Por ejemplo, se relaciona con el proceso de dos máquinas, ya que se muestra el proceso de una primera máquina que hace cambiar un elemento y luego una segunda máquina que lo convierte en el elemento original.
- La grafica de la función inversa corresponde a la reflexión de la función con respecto a la recta $y = x$.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, lo fui, porque traté de relacionar la función inversa y otros conceptos usando dibujos que ayudaran a resolver los problemas.
- Respuesta variada. Por ejemplo, relacionar para una misma función sus distintas representaciones, ya que algunas son más directas y sencillas, mientras que otras requieren mayor desarrollo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sirvió para entender de mejor forma las relaciones entre las funciones y sus funciones inversas, y además, para comprobar visualmente esas relaciones.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ayudan, ya que se evita el aumento de la contaminación, considerando que hoy en día la mayoría de nuestras actividades requieren el uso de algún tipo de energía.

Síntesis de Unidad 2 • Álgebra y funciones

Lección 1 • Función cuadrática

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, y cuando me costó obtener el resultado de inmediato, volví a revisar con calma los pasos de mi desarrollo para identificar el error y así poder solucionarlo correctamente.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, a ambas las valoro mucho, porque son habilidades que sirven para enfrentar de mejor forma las situaciones de la vida, en cualquier etapa de ella.
- Respuesta variada. Por ejemplo, me gustaría que existiera una ley obligatoria para el reciclaje, que hubiera más incentivos para usar el transporte público o la bicicleta; además, participaría de estas acciones siendo voluntario para motivar a las personas.

Lección 2 • Función inversa

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, se vio reflejado en el entorno de respeto y confianza en el cual trabajamos como grupo, se reflejó en una forma más creativa de trabajar.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, las expuse, porque se generó una instancia de respeto y confianza, lo cual ayudo al trabajo en equipo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, la aplicación de algunas fórmulas de la función cuadrática, por la identificación de sus parámetros. Superé estas dificultades revisando con calma mi desarrollo y solicitando ayuda a mis compañeros.

Unidad 3 • Geometría

Página 91

1. Respuesta variada. Por ejemplo, sí, conozco dos. Es muy importante, ya que motiva a la ciudadanía a practicar deportes y actividades al aire libre.

2. Como la cancha corresponde a un rectángulo, la medida de la diagonal se puede aplicando el teorema de Pitágoras. Llamando d a la medida de la diagonal, el desarrollo queda así:

$$105^2 + 68^2 = d^2$$
$$11\,025 + 4624 = d^2$$
$$15\,649 = d^2$$
$$\sqrt{15\,649} = d$$

Habilidades del siglo XXI

- Respuesta variada. Por ejemplo, porque es un lenguaje compuesto por letras, números y símbolos que significan lo mismo en cualquier lugar del mundo, independiente del idioma.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí reflexiono, porque es importante entender lo que se está realizando y, a partir de ello, se aprende a pensar en cómo resolver un problema.

Conocimientos previos

- Respuesta variada. Por ejemplo, la semejanza.

Lección 1 • Razones trigonométricas

Razones trigonométricas en nuestro entorno

Página 92

- Tuvieron 60 s. Respuesta variada. Por ejemplo, no, porque en tan poco tiempo es difícil mostrar la habilidad del competidor.
- Respuesta variada. Por ejemplo, porque se lleva a cabo en un escenario que simula una calle.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, porque hay que entrenar y alimentarse adecuadamente para realizar las rutinas correctamente.
- No, porque, como corresponden al mismo lado, miden lo mismo.
- Si, porque el lado $\overline{BA}$ corresponde a la hipotenusa del triángulo y el lado $\overline{AC}$ es un cateto. Y en todo triangulo rectángulo, la medida de la hipotenusa es mayor que la medida de un cateto.

Página 94

- La razón trigonométrica es adimensional, ya que no tiene una unidad de medida.

Página 95

- Respuesta variada. Por ejemplo, puedo utilizar la razón seno de la siguiente manera:

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida de la hipotenusa}} = \frac{x}{100}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{100}$$
$$x = 50$$

Por lo tanto, el segmento $\overline{CA}$ mide 50 m.

- Aplicando el teorema de Pitágoras, la verificación queda así:

$$\sqrt{50^2 + 86{,}6^2} = \sqrt{2\,500 + 7\,499{,}56} = \sqrt{9\,999{,}56} \approx 100$$

Página 96

- Porque su valor decimal es el mismo. Se utilizó la racionalización de la fracción para eliminar la raíz en el denominador.
- Sí es correcto, ya que, de acuerdo con la imagen del ejemplo, se cumple que sen $\alpha = \cos \beta = \frac{7}{\sqrt{65}}$.

Página 97

- Respuesta variada. Por ejemplo, ¿qué es una agrimensora?, ¿cuál es el criterio de semejanza de triángulos utilizado?, etc.

Página 98

- Utilizando una calculadora manual, se comprueba que las dos aproximaciones son correctas.

Página 99

- Se reemplaza $\alpha = 10°$ y se calcula d.

$$d = \frac{2{,}5}{\tan 10°} \approx 14{,}2$$

Por lo tanto, sí es posible hacer chocar la pelota dentro de la cancha.

Valores de las razones trigonométricas

Página 100

- Respuesta variada. Por ejemplo, no había escuchado antes esta palabra, no sabía lo que significaba.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, porque al practicar un deporte se genera un cambio físico y disminuyen los niveles de estrés.
- No corresponde a un triángulo equilátero. Es, aproximadamente, un triángulo isósceles, ya que dos de sus lados tienen aproximadamente la misma medida.
- La medida del seno de α podría calcularse expresándolo como sen $\alpha = ba$ y, con una calculadora, estimaría un ángulo que cumpliera que su seno mida aproximadamente ba.

Página 102

- Respuesta variada. Por ejemplo, aplicaría el teorema de Pitágoras en el triángulo JKI, de manera que $d = \sqrt{5{,}485^2 + (5{,}485\sqrt{3})^2}$.

Página 103

- Se puede calcular la medida usando la razón sen 30° en el triángulo DEC.

$$\text{sen } 30° = \frac{3}{DE}$$

$$DE = \frac{3}{\text{sen}30°} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Por lo tanto, la medida del lado $\overline{DE}$ es 6 m.

Página 104

- El valor es 2,59807621 ≈ 2,6.
- Utilizando la razón trigonométrica seno:

$$\text{sen } 60° = \frac{x}{y} = \frac{1{,}5\sqrt{3}}{y} \Leftrightarrow \quad y = \frac{1{,}5\sqrt{3}}{\text{sen } 60°} = \frac{1{,}5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$$

  Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$y^2 = 1{,}5^2 + (1{,}5\sqrt{3})^2 = 2{,}25 + 6{,}75 = 9 \Leftrightarrow y = \sqrt{9} = 3$$

Página 105

- El valor es 9,89949493… ≈ 9,9.

Página 106

- Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas con las medidas que se observa en la Captura 3.

$$\text{sen } 30° = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

$$\cos 30° \approx \frac{0{,}87}{1} = 0{,}87$$

$$\tan 30° \approx \frac{0{,}5}{0{,}87} \approx 0{,}575$$

- El de sen 30° sí. Los de cos 30° y tan 30° son aproximados.

Página 107

- Para determinar la medida de ambos ángulos utilizaría la razón seno, porque en los triángulos rectángulos DCA y CDB son conocidas las medidas de los catetos opuestos a los ángulos que se desea calcular y las de las hipotenusas correspondientes.
- Los valores obtenidos con la calculadora son sen 30° = 0,5; tan 60° ≈ 1,732 y cos 45° ≈ 0,707 y coinciden con los obtenidos en los ejemplos anteriores.

Para finalizar la Lección 1

- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, las expuse, porque me sirve para complementar mis opiniones y conocimientos con los de mis compañeros y compañeras, y así generar un ambiente de aprendizaje adecuado.
- Respuesta variada. Por ejemplo, tuve algunas dificultades para aproximar los valores decimales que obtuve.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, me sirvieron para comprender los problemas y así poder resolverlos.
- Respuesta variada. Por ejemplo, aplicaría lo aprendido en Física, ya que las magnitudes vectoriales requieren el trabajo con razones trigonométricas.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, porque me parecieron interesantes y desafiantes.
- Respuesta variada. Por ejemplo, me ayuda a ser disciplinado y a tener un estilo de vida saludable.

Lección 2 • Aplicaciones de las razones trigonométricas

Ángulos de elevación y depresión

Página 108

- Respuesta variada. Por ejemplo, por los enormes macizos naturales que le dan su nombre, además de ser un lugar natural con mucha belleza en sus paisajes.

- Respuesta variada. Por ejemplo, es muy necesario, ya que nos ayuda a regular el clima, mantener la biodiversidad de las especies y generar recursos naturales que se utilizan para la industria de la alimentación o vestimenta, entre otros.
- Respuesta variada. Por ejemplo, el pronóstico del tiempo, la dificultad del trayecto, las condiciones del camino, la duración del trayecto, etc.

Página 109

- Es correcto, porque con esa aproximación, la distancia sería

$$\frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ m} \approx \frac{100 \cdot 1{,}732}{3} \text{ m} = \frac{173{,}2}{3} \text{ m} \approx 57{,}73 \text{ m} > 55 \text{ m}$$

Página 110

- Respuesta variada. Por ejemplo, es un comentario bastante acertado que se puede utilizar en el planteamiento de un problema, ayudando visualmente a relacionar la información disponible con lo que se desea solucionar.
- Observando el triángulo PRT, se puede definir lo siguiente:

$$\text{medida del cateto opuesto a } \alpha \rightarrow 10 \text{ m}$$

$$\text{medida de la hipotenusa} \rightarrow 20 \text{ m}$$

Usando la definición de la razón seno, se tiene que sen $\alpha = \frac{10}{20}$, y como sen $30° = \frac{1}{2}$, entonces, $\alpha = 30°$.

Página 111

- Obtendría el valor d ≈ 12,63 m. Como este valor es relativamente cercano a 12,69 m (su diferencia es de 0,06 m), entonces, se podría afirmar que es una buena aproximación.

Descomposición vectorial

Página 112

- Respuesta variada. Por ejemplo, porque estos ámbitos permiten lograr un objetivo en cualquier disciplina, ya sea individual o grupal.
- Respuesta variada. Por ejemplo, conocía que es un deporte que se realiza en equipos, donde se enfrentan dos de ellos, en los cuales sus integrantes tienen posiciones especificas en la cancha.
- Respuesta variada. Por ejemplo, es importante el compañerismo, ya que ayuda a generar relaciones de confianza, donde se establece una comunicación clara y se genera la idea de apoyo incondicional entre los jugadores.
- Representan las posiciones de los jugadores.
- Podría relacionarse con un vector.

Página 113

- No es correcto, porque al realizar el cálculo se cumple lo siguiente:

$$\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = (4, 3) - (4, -4) = (4 - 4, 3 - (-4)) = (0, 7) \neq (3, 0)$$

Página 115

- Como los ejes del plano cartesiano son perpendiculares entre sí, el ángulo que forma el vector con el eje Y mide $90° - 45° = 45°$.

Resolución de problemas

Página 116

- Respuesta variada. Por ejemplo, no, pero me gustaría hacerlo. Creo que sí, porque este deporte requiere gran concentración y óptimos reflejos.

- Respuesta variada. Por ejemplo, revisar que la mesa no tenga puntas o partes rotas y que no haya objetos cerca de ella, para evitar que los jugadores se golpeen o resbalen.
- Respuesta variada. Por ejemplo, un triángulo, ángulos, un vector, etc.
- Respuesta variada. Por ejemplo, en los ángulos que se generan al golpear la pelota con la paleta y en las direcciones en que cae la pelota.

Página 117

- Utilizando la razón trigonométrica tangente:

$$\tan 60° = \frac{d}{2{,}3} \Leftrightarrow d = 2{,}3 \cdot \tan 60° = 2{,}3 \cdot \sqrt{3} \approx 3{,}9837\ldots$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 4{,}6^2 - 2{,}3^2 = 21{,}16 - 5{,}29 = 15{,}87 \Leftrightarrow d = \sqrt{15{,}87} \approx 3{,}9837\ldots$$

Página 119

- Directamente, no se podría haber resuelto, ya que se hubiera encontrado el valor de la hipotenusa $\overline{AE}$, pero no el de la altura $\overline{ED}$. Para encontrar este valor, además se tendría que haber aplicado el teorema de Pitágoras.
- Sí, es un deporte arriesgado, ya que se pueden generar caídas y choques. Algunas medidas consistirían en usar casco antigolpes, rodilleras, coderas, etc.

Página 120

- Depende de la aproximación. Si se redondea $\sqrt{3}$ a la cifra de las decimas se obtiene 1,7 y la altura del cerro seria 35,8 m (menor que 40 m). Pero si se redondea a la cifra de las unidades, se obtiene 2 y la altura del cerro seria 41,8 m (mayor que 40 m).

Página 121

Para finalizar la Lección 2

- Respuesta variada. Por ejemplo, en contextos geométricos y de la Física.
- Respuesta variada. Por ejemplo, utilicé la representación gráfica y el método de los cuatros pasos para la resolución de problemas, etc.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ya que de esa manera se obtienen mejores resultados.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, porque me facilitan los cálculos.
- Respuesta variada. Por ejemplo, me costó identificar los catetos opuestos y adyacentes de los ángulos.
- Respuesta variada. Por ejemplo, me gustaría practicar tenis de mesa y vóleibol, porque requieren de concentración y disciplina.

Página 121

Síntesis de Unidad 3 • Geometría

Lección 1 • Razones trigonométricas

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, si lo demostré, porque muchos de los contextos trabajados estaban relacionados con la vida cotidiana, especialmente con los deportes. Sentí confianza, ya que apliqué distintas estrategias para resolver los problemas.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, ayuda a obtener valores cuyo cálculo manual es lento y difícil.

Lección 2 • Aplicaciones de las razones trigonométricas

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, sí trabajé de forma responsable, ya que ayudé a mis compañeros y compañeras cuando lo requirieron, aportando con mis ideas y conocimientos. Además, fui respetuoso y proactivo, aportando a generar un ambiente de confianza y respeto. Me baso en las opiniones de los integrantes de mis grupos de trabajo.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, el reconocimiento de la igualdad de derechos de todas las personas permite equiparar el acceso a la información y establecer relaciones de confianza, permitiendo que la sociedad se desarrolle en forma sana y equilibrada.

Unidad 4 • Probabilidad y estadística

Página 125

1. La probabilidad es $\frac{4}{6}$.
2. Respuesta variada. Por ejemplo, sí, es importante, ya que permitiría que las personas ciegas fueran más autónomas y se pudieran desarrollar de mejor forma en la sociedad.

Habilidades del siglo XXI

- Respuesta variada. Por ejemplo, las ganas de aprender y la persistencia.
- Respuesta variada. Por ejemplo, «Bienvenidos, aquí todos aprendemos», porque hoy en día existen recursos de lenguaje que permiten aprender a todos, independiente de la falta de visión.

Conocimientos previos

- Respuesta variada. Por ejemplo, la regla multiplicativa de la probabilidad.

Lección 1 • Técnicas de conteo

Permutaciones y variaciones

Página 126

- La contraseña de Sofía tiene 5 caracteres y la de Martín, 7 caracteres.
- Se pueden crear más contraseñas en la plataforma BLUE (usada por Martín), ya que tiene más caracteres, donde cada uno se puede completar con 10 dígitos (con repetición) o con menos dígitos (sin repetición).
- Respuesta variada. Por ejemplo, utilizar contraseñas que contengan letras (mayúsculas y minúsculas), signos y números; no abrir los enlaces que provengan de correos de sitios extraños.

Página 127

- No cambiaría, porque, a pesar de que se cambia el orden de los eventos, cada uno de ellos mantiene el mismo número de maneras distintas de conformarse, por lo tanto, solo ocurriría un cambio en el orden de los factores de la multiplicación.

Página 128

- Se pueden escribir menos de 64 caracteres distintos, ya que uno de los eventos quedo fijo, por lo tanto, hay menos combinaciones que realizar.

Página 130

- Se pueden comprobar de dos formas: efectuando el cálculo de la definición de un número factorial o usando los botones para el cálculo del factorial. En ambos casos se obtiene: $3! = 6$ y $4! = 24$.

Página 131

- La fórmula sería la siguiente:

$$V_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

- Se puede comprobar de dos formas: realizando el cálculo con la fórmula o utilizando los botones para las variaciones en la calculadora, obteniendo $V_{10}^4 = 5\,040$.
- El resultado sería $VR_{10}^4 = 4^{10} = 1\,048\,576$.

Página 133

- La fórmula sería la siguiente:

$$P_n^{1,\,1,\,1} = \frac{n!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = n!$$

- Respuesta variada. Por ejemplo, la creación de contraseñas, la selección de colores de una paleta.

Combinaciones

Página 134

- Respuesta variada. Por ejemplo, no lo creo, ya que hay símbolos muy similares entre sí, diferenciándose por pequeños detalles.
- Respuesta variada. Por ejemplo, podrían representar la vida marina y los árboles, respectivamente.
- Respuesta variada. Por ejemplo, se podrían descubrir las tradiciones de los primeros habitantes que llegaron a la isla. Este conocimiento es valioso, ya que se podrían comprender algunos misterios que esconde la isla, junto con el reconocimiento del valor de su cultura y la importancia de conservarla.

Página 135

- Utilizando los botones de la calculadora, se obtiene lo siguiente:

$$C_6^{52} = 20\,358\,520$$

Página 136

- Respuesta variada. Por ejemplo, utilizando el principio multiplicativo, porque es un cálculo más directo y su lógica es más simple de entender.

Página 137

- La afirmación es correcta. Al desarrollar cada combinatoria se tiene lo siguiente:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_{(n-k)}^n = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Por lo tanto, $C_k^n = C_{(n-k)}^n$.

Página 138

- Caso $n = k$.

$$C_n^n = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Es decir, hay solo un grupo posible cuando se desea formar un grupo con la cantidad total de elementos, ya que no importa su orden.

Caso $k = 1$.

$$C_1^n = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n}{1} = n$$

Es decir, cuando se desea formar grupos de 1 elemento, se pueden generar tantos grupos como sea el número total de elementos.

- Porque se desea elegir una sola opción dentro del total de 5 elementos, por lo tanto, no es posible que exista una repetición. Realizando el desarrollo de la formula queda así:

$$C_1^5 = \frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

$$CR_1^5 = \frac{(5+1-1)!}{(5-1)! \cdot 1!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

Página 139

- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, estamos de acuerdo, ya que, al aumentar el número de la población, la probabilidad de ser elegido disminuye, pues hay más opciones de elección.

Para finalizar la Lección 1

- Las permutaciones y variaciones determinan las disposiciones de los elementos, en que el orden de ellos importa; mientras que en las combinaciones, el orden de los elementos no importa. En las permutaciones se calcula la disposición de todos los elementos de un conjunto y en las variaciones, la disposición de una parte del total de elementos de un conjunto.
- Respuesta variada. Por ejemplo, realicé diagramas, simplificaciones de cálculo y validaciones con calculadora, acciones que facilitaron el trabajo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí ayudó, ya que son situaciones cotidianas, por lo que es más fácil relacionar los nuevos contenidos con el conocimiento ya adquirido.
- Respuesta variada. Por ejemplo, trabajando para que las personas tengan acceso a las mismas oportunidades.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, ya que hay mucha información falsa que genera confusión.
- Respuesta variada. Por ejemplo, esto permite que la sociedad pueda desarrollarse en diversos ámbitos, como el cultural, el económico, el sanitario, entre otros; generando una sociedad más integral y diversa, lo cual es atractivo para las personas.

Lección 2 • Cálculo de probabilidades

Probabilidades y azar

Página 140

- Hay 52 cartas en total.
- Cada pinta tiene 13 cartas.
- Los eventos son equiprobables porque cada carta es única, por ende, tienen la misma probabilidad de ser extraídas.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí he jugado domino, y algunos aspectos positivos son la generación de pensamiento crítico y la oportunidad de conocer nuevas personas.

Página 142

- Utilizando la calculadora se obtiene el siguiente resultado:

$$C_5^{52} = 2\,598\,960$$

Página 144

- Suponiendo que los cartones son construidos con números seleccionados al azar, son independientes entre sí y, además, son únicos, la probabilidad sería la siguiente:

$$10 \cdot \frac{1}{4\,845} \approx 0{,}002064$$

- Cualquier combinación de números, ya que cada número es único y no se repite, por lo tanto, cualquier combinación de 4 números tiene la misma probabilidad de ganar el sorteo, es decir, son equiprobables.

Página 145

- Si, porque esta relación hace que los espacios muestrales sean los mismos; por ende, la probabilidad tiene el mismo denominador (y el numerador es el mismo). Esto ocurre porque la suma de elementos de ambos casos corresponde a la cantidad total de elementos.

Página 146

- Utilizando la calculadora, se obtiene el siguiente resultado:

$$CR_2^7 = 28$$

Página 147

- No es relevante el orden para el cálculo realizado, ya que solo importa extraer los 7 «chanchos», independiente del orden con que van saliendo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, las técnicas de conteo son útiles para determinar las probabilidades, ya que se puede saber en qué juego o con qué combinación es más probable ganar.

Probabilidades en la sociedad

Página 148

- Se puede resolver mentalmente C_1^{100} calculando el numerador $100!$, luego el denominador $99!$ y haciendo la simplificación de ambos, obteniendo como resultado 100.
- Se cumple la igualdad $C_{25}^{100} = C_{75}^{100}$, porque se cumple la relación 75 + 25 = 100.
- Respuesta variada. Por ejemplo, se debería seleccionar un total de 100 personas en que 65 fueran mujeres y 35 hombres; de esta forma se mantendría la relación.
- El alumnado debería tener una amplia diferencia entre la cantidad de hombres y mujeres.

Página 149

- Si, es importante conservar esta razón para que la muestra sea representativa de la población y se logre el objetivo del estudio.

Página 150

- No se consideró la cantidad de hombres, ya que es un evento independiente que no influye en la elección de Claudia; por lo tanto, el resultado es el mismo.
- Claudia es una de las 54 trabajadoras de la empresa, por lo tanto, la probabilidad de ser elegida una vez es $\frac{1}{54}$. Como se seleccionará al azar a 6 mujeres, entonces, la combinación de casos en que puede ser elegida Claudia es $C_1^6 = \frac{6!}{(6-1)! \cdot 1!} = \frac{6!}{5!} = 6$. Por consiguiente, la probabilidad de que Claudia sea seleccionada en la muestra es $6 \cdot \frac{1}{54} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$.

- El cálculo realizado consiste en calcular todas las muestras posibles en que este Claudia, por lo tanto, se debe fijar la participación de ella y esto hace que se consideren las combinaciones de las otras 5 mujeres elegidas.

Página 151

- Se obtendría el mismo valor calculado, porque la suma de todas las opciones (2 + 3 + 5 + 10) da el mismo resultado, independiente del orden en el cual se hagan las elecciones.

Página 152

- Se cumplen las condiciones, ya que todas las combinaciones de genes tienen la misma probabilidad de ser extraídas, es decir, son equiprobables y, además, la cantidad total de combinaciones de los genes es finita.

Página 155

Para finalizar la Lección 2

- Se relacionan directamente, ya que para determinar la cardinalidad de los espacios muestrales y de los eventos, se deben utilizar permutaciones y combinaciones.
- Se debe corroborar que se cumplan las siguientes condiciones: se pueden contar todos los resultados posibles del experimento aleatorio y, además, cada resultado es equiprobable.
- Respuesta variada. Por ejemplo, contribuye a la generación de espacios de discusión, incrementa la capacidad de comprensión.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí ayudaron, porque permitieron representar de forma gráfica y visual las situaciones.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, porque se dio un espacio de respeto en el grupo de trabajo.
- Respuesta variada. Por ejemplo, sí, porque ayuda a entender qué tan probable puede ser una situación y se pueden aplicar en los juegos de azar, en la selección de una muestra o en una combinación que se desee crear.

Síntesis de Unidad 4 • Probabilidad y estadística

Lección 1 • Técnicas de conteo

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, revisando que la fuente de información sea verídica y comparándola con fuentes oficiales y que dispongan de reputación, además de corroborar que dicha información no afecte la privacidad de las personas.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, en el ámbito laboral, en la selección de cuidadores en una familia.
- Respuesta variada. Por ejemplo, generar el interés y el compromiso para trabajar en la resolución de las diferencias.

Lección 2 • Cálculo de probabilidades

Aprendiste

- Respuesta variada. Por ejemplo, la empatía, la voluntad y la conciliación.

Lograste

- Respuesta variada. Por ejemplo, generando una presentación que sea sencilla y breve, que logre captar la atención de las personas.
- Respuesta variada. Por ejemplo, un comportamiento responsable es aportar con una idea que ayude a solucionar un problema, mientras que un comportamiento no responsable sería no escuchar las ideas de los compañeros y compañeras.

El Texto del Estudiante **Matemática 2º medio** es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Cristian Gúmera Valenzuela

COORDINACIÓN EDITORIAL
Álex Ortega Toledo

COORDINACIÓN DE PROYECTOS DIGITALES
Manoli Camacho Ángeles

JEFATURA DE ÁREA
Patricio Loyola Martínez

EDICIÓN
Daniel Catalán Navarrete

AUTORÍA
Carlos Castro Maldonado
Daniel Catalán Navarrete
Pablo León Velasco
Alejandro Sepúlveda Peñaloza

ASESORÍA EN ESTRATEGIAS LEC PARA APRENDER
Ximena González Vargas
Álex Ortega Toledo

ASESORÍA EN PUEBLOS ORIGINARIOS
Priscila Duath Sepúlveda
Pedro Prado Verdejo

COORDINACIÓN GRÁFICA
Sergio Pérez Jara

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Álvaro Pérez Montenegro

FOTOGRAFÍAS
Archivo Santillana
GettyImages.com
Shutterstock.com
Wikicommons

ILUSTRACIÓN
Álvaro Gómez Blumenthal

CORRECCIÓN DE ESTILO
Alejandro Cisternas Ulloa

DOCUMENTACIÓN
Cristian Bustos Chavarría

PRODUCCIÓN
Rosana Padilla Cencever

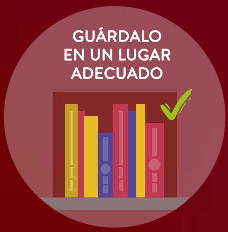
ISBN: 978-956-15-3994-5

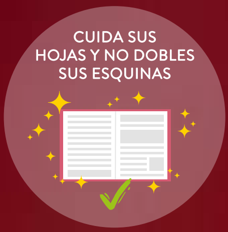
Inscripción Nº: 2024-A-11093

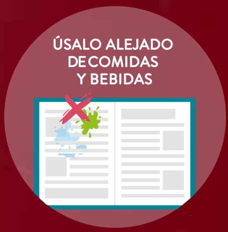
Se terminó de imprimir esta 1ª edición de 250.941 ejemplares en el mes de enero del año 2025.

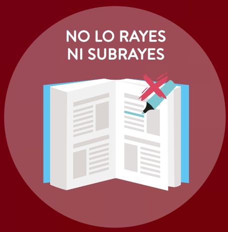
Impreso en Chile por A Impresores.

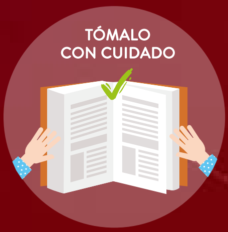
www.santillana.cl











Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

SANTILLANA

9 789561 539945